חלק II ענו על שתי השאלות הבאות.

✓ 4. תהי $A \in M_2(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

מצאו $P \in M_2(\mathbb{R})$ אורתוגונלית כך ש $P^{-1}AP$ אלכסונית.

הסבירו את תהליך הפתרון.

✓ 5. ב $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית מצאו את הוקטור הקרוב ביותר ל $(1,1,1)$

ב- U, כאשר

$U = \mathrm{Span}((1,1,0),(1,-1,0))$.

הסבירו את פתרונכם.

חלק III ענו על כל שבע השאלות.

תהי $B \in M_3(\mathbb{R})$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

✓ 6. האם B לכסינה? נמקו בקצרה.

✓ 7. מהו הפולינום המינימלי של B^{100}? נמקו בקצרה.

✓ 8. תהי $A \in M_4(\mathbb{C})$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & 0 & 17 & 15 \\ 2 & i & i & i \end{pmatrix}$

ו $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ הערכים העצמיים של A (כולל רבוי). (לאו דווקא שונים)

מצאו את $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ ואת $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4$.

רמז: חישבו לפני שתחשבו, ניתן לפתור את השאלה בעל פה.

√ .9 האם המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

דומה למטריצה אלכסונית ב $M_5(\mathbb{R})$? נמקו! רמז: עיינו היטב במטריצה.

√ .10 יהי $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ בסיס למרחב וקטורי V מעל שדה F, ותהי $f:V\times V\to F$ תבנית בילינארית.

הוכיחו או הפריכו:

אם $f(\alpha_i,\alpha_j) = f(\alpha_j,\alpha_i)$ לכל i,j

אזי $f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)$ לכל $\alpha,\beta\in V$.

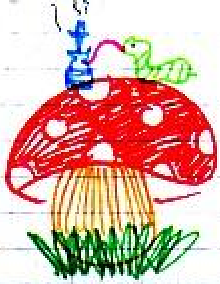
√ .11 יהי V מרחב מכפלה פנימית $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית צמודה לעצמה.

האם $\langle T\alpha,\alpha\rangle = 0$ לכל α גורר $T=0$? הוכיחו את תשובתכם.

? √ .12 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ טרנספורמציה ליניארית אורתוגונלית.

A היא מטריצה אלכסונית המייצגת את T ביחס לבסיס מסוים. מהן המטריצות A האפשריות? נמקו!

בהצלחה!!



בהצלחה!

נמיסה!

(: מבחן בלינארית (:

חלק II

(4) תהי $A \in M_2(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

נמצא P ב- $M_2(\mathbb{R})$ כך ש $P^{-1}AP$ אלכסונית.

ראשית נציין שמאחר ש- A סימטרית נובע שניתן ללכסן אותה ע"י מטריצה אורתוגונלית.

נמצא את הע"ע של A.

$$p_A(x) = \det(xI - A) = \det\begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix} =$$
$$= (x-2)^2 - (-1)^2 = x^2 - 4x + 4 - 1 =$$
$$= x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$\Leftarrow$ הערכים העצמיים הם $\lambda_1 = 1$ ו- $\lambda_2 = 3$.

נמצא את המרחבים העצמיים המתאימים:

$$V_1 = \ker(A - I) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$V_3 = \ker(A - 3I) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

נרצה שהבסיסים יהיו אורתונורמליים לכן ננרמל:

$$V_1 = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}, \quad V_3 = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$$

בתהליך הוכחת המשפט שמטריצה נורמלית היא לכסינה ע"י מטריצה אורתוגונלית מראים

שהמטריצה המלכסנת היא $P = \begin{pmatrix} | & | \\ \alpha_1 & \alpha_3 \\ | & | \end{pmatrix}$

כאשר α_1 בסיס אורתונורמלי של λ_1

α_3 בסיס אורתונורמלי של λ_3.

ואכן: נגדיר $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

ברור שזו מטריצה אורתוגונלית כי העמודות שלה הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$.

ומתקיים $P^tP = I$ כלומר $P^{-1} = P^t$!

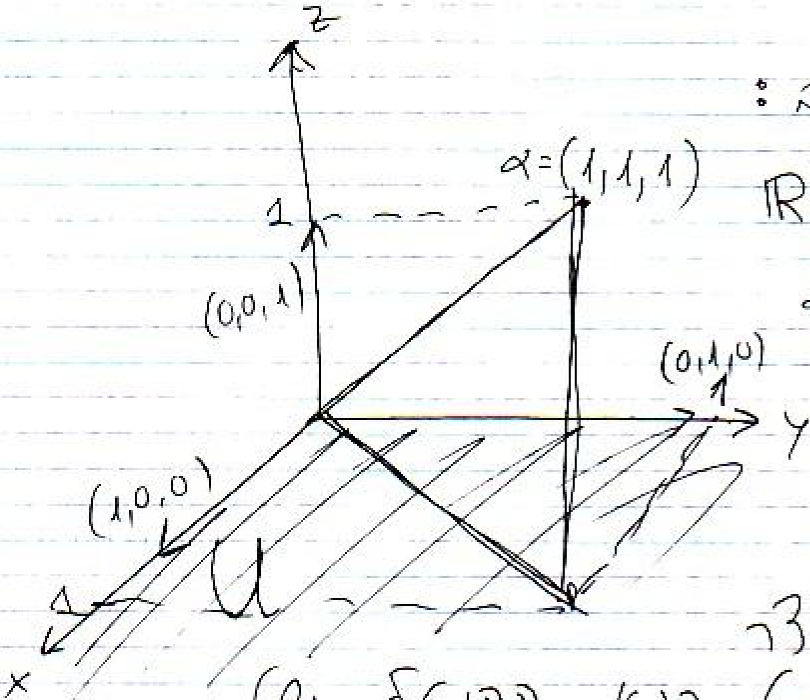
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5) נצייר את המצב:



U הוא בעצם $\mathbb{R}^2$

שהרי $\{(1,1,0),(1,-1,0)\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}^2$.

זה לא מדויק, U הוא מישור xy.

הוכחנו בתרגיל שהווקטור הכי קרוב (זה שאני מחפשים) הוא ההיטל של α על U. ההיטל הזה הוא כמובן הווקטור $(1,1,0)$:

$\varepsilon_1=(1,0,0)$, $(0,1,0)=\varepsilon_2$,

למה?

בסיס אורתונורמלי של U. ההיטל של α על U הוא $\langle\alpha,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1+\langle\alpha,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2=$

$$=\langle(1,1,1),(1,0,0)\rangle(1,0,0)+\langle(1,1,1),(0,1,0)\rangle(0,1,0)=$$

$$=1(1,0,0)+1(0,1,0)=(1,1,0)=\beta$$

זה הווקטור שמקיים $\underbrace{\alpha-\beta}_{(0,0,1)}\perp U$ כלומר

$(0,0,1)=\alpha-\beta\perp(1,0,0)$

וגם $(0,0,1)=\alpha-\beta\perp(0,1,0)$.

10

חלק III

6) תהי $B\in M_3(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1&5&7\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$

ברור שהפולינום האופייני של B הוא

$$\det(xI-B)=\det\begin{pmatrix}x-1&-5&-7\\0&x-2&-6\\0&0&x-3\end{pmatrix}=$$

5

$$=(x-1)(x-2)(x-3)$$

כי זו מטריצה משולשית

⇐ ל-B יש 3 ע"ע <u>שונים</u>

⇐ B לכסינה.

7) ~~הפולינום המינימלי של B הוא $m(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$~~
~~משום שחייבים להופיע בו~~ <u>כל</u> ~~הערכים העצמיים~~.

B דומה ל $\begin{pmatrix}1&&0\\&2&\\0&&3\end{pmatrix}$ ⇐ קיימת P הפיכה כך ש- $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}=P^{-1}BP$.

ניתן להראות באינדוקציה (והראינו בתרגול) שלכל n

$$\begin{pmatrix}1^n&&\\&2^n&\\&&3^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}^n=\underbrace{(P^{-1}BP)\cdots(P^{-1}BP)}_{n\text{ פעמים}}=$$

5

$$=P^{-1}B^{n}P$$

כלומר B^{100} דומה ל $\begin{pmatrix}1^{100}&0&0\\0&2^{100}&0\\0&0&3^{100}\end{pmatrix}$ ⇐ הפולינום המינימלי שלה הוא $(x-100)(x-2^{100})(x-3^{100})$

(8) תהי $A \in M_4(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & 0 & 17 & 15 \\ 2 & i & i & i \end{pmatrix}$$

ויהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ הערכים העצמיים שלה (כולל ריבוי).

ראשית, נשים לב שב-A שתי שורות שוות $\Leftarrow$ היא אינה הפיכה $\Leftarrow$ 0 הוא ע"ע שלה $\Leftarrow$ $\prod_{i=1}^{4} \lambda_i = 0$.

משפט של אדנו מתרגול אומר שאם הפולינום האופייני מתפרק לגמרי לגורמים לינאריים (כמו במקרה שלנו) אז המטריצה דומה למטריצה משולשית

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

כמו כן ידוע שהעקבה נשמרת תחת דמיון.

$\Leftarrow$ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 + 2 + 17 + i =$

$= 20 + i$

(10) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס ל- V מעל F.

$f: V\times V \to F$ תבנית בילינארית.

אם $f(\alpha_j, \alpha_i) = f(\alpha_i, \alpha_j)$ לכל i, j אזי

$f(\beta, \alpha) = f(\alpha, \beta)$ לכל $\alpha, \beta \in V$.

~~פתרון~~ הוכחה: (*) ראה סוף אחרי שאלה 9 (עמוד 3 בעמודים)

ההגדרה של מטריצה של תב"ל בהינתן בסיס היא $B = (b_{ij})$ כאשר $b_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$.

משפט שלמדנו בכיתה: תהי $f: V\times V \to F$ תב"ל. אזי f סימטרית אמ"מ המטריצה שלה ~~בכל~~ בכל בסיס היא סימטרית. 8

הוכחנו גם שאם המטריצה סימטרית באיזשהו בסיס, אז היא סימטרית בכל בסיס.

נתון ש- $f(\alpha_j, \alpha_i) = f(\alpha_i, \alpha_j) \Rightarrow b_{ij} = b_{ji}$

כלומר המטריצה סימטרית ולכן התבנית סימטרית, כלומר $f(\beta, \alpha) = f(\alpha, \beta)$ לכל $\alpha, \beta \in V$ (11)

(11) V מרחב מכפלה פנימית, ו- $T: V \to V$ ט"ל צמודה לעצמה. נתון ש- $\langle T\alpha, \alpha\rangle = 0$ לכל α.
אזי $T = 0$.

הוכחה: מהנתון נובע שלכל α, β

$$0 = \langle \overbrace{T(\alpha+\beta)}^{T\alpha + T\beta}, \alpha + \beta\rangle =$$

$$= \cancel{\langle T\alpha, \alpha\rangle} + \langle T\alpha, \beta\rangle + \langle T\beta, \alpha\rangle + \cancel{\langle T\beta, \beta\rangle} =$$

$$\underset{T=T^*\text{ כי}}{=} \langle T\alpha, \beta\rangle + \langle \beta, T\alpha\rangle$$

כעת, נחלק את ההוכחה למקרים:

- $F = \mathbb{R}$. אז בגלל הסימטריות

$$0 = \langle T\alpha, \beta \rangle + \langle T\alpha, \beta \rangle =$$

$$= 2 \langle T\alpha, \beta \rangle$$

$\Leftarrow \langle T\alpha, \beta \rangle = 0$ לכל $\alpha, \beta \in V$.

הוכחנו בכיתה למה שאם זה נכון, אז

$T = 0 \Leftarrow T = 0$.

- $F = \mathbb{C}$. אז מהנתון לכל $\alpha, \beta \in V$

$$0 = \langle \overbrace{T(i\alpha + \beta)}^{iT\alpha + T\beta}, i\alpha + \beta \rangle =$$

$$= \cancel{\langle iT\alpha, i\alpha \rangle} + \langle iT\alpha, \beta \rangle + \langle T\beta, i\alpha \rangle + \cancel{\langle T\beta, \beta \rangle} =$$

$$= i \langle T\alpha, \beta \rangle - i \langle T\beta, \alpha \rangle =$$

$$= i \left(\langle T\alpha, \beta \rangle - \langle T\beta, \alpha \rangle \right)$$

$$\Leftarrow \langle T\alpha, \beta \rangle - \langle T\beta, \alpha \rangle = 0$$

ומהמקרה $\langle T\alpha, \beta \rangle + \langle T\beta, \alpha \rangle = 0$

$$\Leftarrow 2 \langle T\alpha, \beta \rangle = 0$$

$\Leftarrow$ כמו במקרה של $F = \mathbb{R}$ נקבל $T = 0$.

(12) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ט"ל אורתוגונלית.

A היא מטריצה <u>אלכסונית</u> המייצגת את
T ביחס לבסיס מסוים. מהן המטריצות
a האפשריות?

T אורתוגונלית ובפרט היא נורמלית. לכן
היא לכסינה ע"י בסיס אורתונורמלי. ולכן
A מייצגת את T ביחס לבסיס <u>אורתונורמלי</u> -1
ולכן A ~~[illegible]~~ אורתוגונלית.

הייצוג לפי בסיס משהו!

נניח $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$. אז $A^t=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$

וצריך ש $|a|=1$ ו- $|b|=1$.

לכן המטריצות הן:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

הערה: יש משפט שאומר שאם T נורמלית
(והיא אכן נורמלית מהגדרה זה) אז היא אורתוגונלית
אמ"מ $|a|=1$ לכל הע"ע שלה והעובדה מה
שכתבתי למעלה זו ההוכחה לכך.

(9) הצגת המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דומה למטריצה אלכסונית ב- $M_5(\mathbb{R})$?

נשים ♡ שהמטריצה סימטרית.

לפי משפט שלמדנו בכיתה

מטריצה סימטרית מעל $\mathbb{R}$ היא לכסינה (אפילו ע״י בסיס אורתונורמלי)

$\Leftarrow$ היא דומה למטריצה אלכסונית.

המשך - 10: נניח ש- $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$

$\beta = \sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_j$

$$f(\alpha, \beta) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_j\right) =$$

בלינאריות והומוגניות בשני משתנים של f

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j f(\alpha_i, \alpha_j) \underset{\text{נתון}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j f(\alpha_j, \alpha_i) =$$

$$= f\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i\right) = f(\beta, \alpha)$$

מלינאריות והומוגניות

מש״ל ☺

חלק I

(3) יהי V מ"ו ממימד סופי n מעל שדה F ויהי T ט"ל $T:V\to V$. אזי T לכסינה אמ"מ הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים מעל F ולכל ע"ע a של T $Geo\, a = Alg\, a$.

<u>הוכחה:</u> T לכסינה אמ"מ המטריצה לפי בסיס כלשהו, A לכסינה.
אז נעשה את ההוכחה על A. בכל אופן, זה לא ממש משנה.

($\Leftarrow$) נניח A לכסינה. אזי היא דומה למטריצה

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

כי לפי תכונות הפולינומים $\deg \prod f_i(x) = \sum \deg f_i(x)$ וידוע שהדרגה של הפולינום האופייני היא n

כמו כן, ידוע שהפולינום האופייני נשמר תחת
דמיון $\Leftarrow$ $p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$

כלומר הוא מתפרק לגמרי לגורמים לינאריים.

נניח ש $a_1,\dots,a_k$ הם הע"ע השונים..!

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{n_i}$$

ראשית $n_i = Alg\, a_i$. וברור ש- $\sum_{i=1}^{n} Alg\, a_i = n$

הוכחנו משפט שאומר שאם A לכסינה אזי
$\sum_{i=1}^{k} Geo\, a_i = n$ (*). כמו כן הוכחנו שלכל a_i

$Geo\, a_i \leq Alg\, a_i$.

נניח שקיים i כך ש $Geo\, a_i \lneq Alg\, a_i$

אז נקבל $\sum_{i=1}^{k} Geo\, a_i \lneq \sum_{i=1}^{k} Alg\, a_i = n$ - בסתירה
ל-(*). $\Leftarrow$ לכל i: $Geo\, a_i = Alg\, a_i$.

(⇐) נניח שהפולינום האופייני מתפרק לגמרי

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n \Leftarrow p(x) = \prod_{i=1}^{k} (x-a_i)^{n_i}$$

כאשר $\{a_i\}$ הע"ע השונים של A ו- $n_i = Alg\,a_i$.

וכן נניח ש-לכל i; $Alg\,a_i = Geo\,a_i$.

אז נקבל ש- $\sum_{i=1}^{k} Geo\,a_i = \sum_{i=1}^{k} Alg\,a_i = n$

כלומר סכום הריבויים הגאומטריים שווה למימד המרחב. וזה גורר ש- A לכסינה.

למה A לכסינה אמ"מ $\sum_{i=1}^{n} Geo\,a_i = n$?

הוכחנו ש- A לכסינה אמ"מ קיים ל- F^n בסיס של ו"ע.

כמו כן הוכחנו ש $\sum_{i=1}^{k} V_{a_i} = \bigoplus V_{a_i}$ ושאם $U = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$ ו- A_i בסיס ל- U_i אז $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ בסיס של U. וכן $\dim U = \sum_{i=1}^{k} \dim U_i$

(⇒) ~~אם A לכסינה קיים~~ אם $\sum^{k} Geo\,a_i = n$ אז ברור ש $\bigoplus_{i=1}^{k} V_{a_i} = \sum_{i=1}^{k} V_{a_i} \subseteq V$ אבל משוויון המימדים $\bigoplus_{i=1}^{k} V_{a_i} = V$ ולכן אם ניקח בסיס לכל אחד מה- V_{a_i}. לכ' בסיס ל- V וקיבלנו בסיס של ו"ע ⇐ היא לכסינה.

(⇐) אם היא לכסינה, אז יש בסיס של ו"ע $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. נניח ש $\alpha_1, \dots, \alpha_{l_1} \in V_{a_1}$ וכן הלאה. ברור שהם בת"ל (כי הם איברי בסיס). נראה שהם פורשים את V_{a_1}. יהי $\alpha \in V_{a_1}$.

אז $\alpha = \sum_{i=1}^{l_1} a_i \alpha_i + \sum_{i=l_1+1}^{n} a_i \alpha_i$. ⇐ $V_{a_1} \ni \alpha - \sum_{i=1}^{l_1} a_i \alpha_i = \sum_{i=l_1+1}^{n} a_i \alpha_i \in \sum_{i=2}^{k} V_{a_i}$

אבל $V_{a_1} \cap \sum_{i=2}^{k} V_{a_i} = \{0\}$ ⇐ $\alpha = \sum_{i=1}^{l_1} a_i \alpha_i$. לכן הם פורשים. ולכן בסיס ל- V_{a_1}. באותו אופן מראים שהו"ע השייכים למרחב עצמי כלשהו מהבסיס הם בסיס לו ולכן $\sum Geo\,a_i = n$.

(1) (א) יהי $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ בסיס של מרחב וקטורי V ויהיו נתונים n וקטורים $\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\varepsilon_j$.

אם Δ היא פונק' נפח על V אז

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=t\,\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$$

כאשר t תלויה רק ב-n^2 סקלרים a_{ij} ולא ב-Δ.

הוכחה: ~~נגדיר מטריצה $A=(a_{ij})$ ונטען ש- $t=|A|$. אז כמובן t תלוי אך ורק ב-$\{a_{ij}\}$ ולא ב-Δ.~~

ראשית נרשום כמה תכונות של פונקציות נפח:

לפי הגדרה

$$\Delta(\alpha_1,\dots,c\alpha_k,\dots,\alpha_n)=c\,\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n)=0$$

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k+\alpha_k',\dots,\alpha_n)=\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n)+\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k',\dots,\alpha_n)$$

והוכחנו בכיתה ש-

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\sum_{j=1}^{n}a_j\alpha_i^j,\dots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^{n}a_j\,\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_i^j,\dots,\alpha_n)$$

וזה כמובן. נכון לכל $n\ge i\ge 1$.

וכן $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)=-\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)$

נשתמש משוויון זה בשביל לפתח את הביטוי

$$\Delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

$$\Delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \Delta\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\varepsilon_{j_1},\ldots,\sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}\varepsilon_{j_n}\right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\Delta\left(\varepsilon_{j_1},\sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2}\varepsilon_{j_2},\ldots,\sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}\varepsilon_{j_n}\right) =$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\Delta(\varepsilon_{j_1},\ldots,\varepsilon_{j_n})$$

ישנן פה n^2 איברים מהצורה $\Delta(\varepsilon_{j_1},\ldots,\varepsilon_{j_n})$.

נראה שכולן תלויות ב-Δ כי הן כפולה של $\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$.

לפי התכונות של פונקציות שציינתי בעמוד הקודם זה בעצם ברור, שהרי ~~בכל~~ בכל אחד מהסכומים

$$\{\varepsilon_{j_1},\ldots,\varepsilon_{j_n}\} = \{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$$

יכול להיות שהם מופיעים בסדר אחר ואז ההבדל בין $\Delta(\varepsilon_{j_1},\ldots,\varepsilon_{j_n})$ ל-$\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ הוא רק בסימן (אם בכלל) ואם הם חוזרים על עצמם אז $\Delta(\varepsilon_{j_1},\ldots,\varepsilon_{j_n})=0$.

בכל אופן, מה שמתאפס מתאפס ואת השאר אפשר להציג כ- $\pm\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$.

ובסה"כ קיבלנו

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\sum_{j_1=1}^{n}\dots\sum_{j_n=1}^{n}a_{1j_1}\dots a_{nj_n}\,d\,\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=$$

$d=\pm 1,0$

בנוסף המקדמי ב Δ

תלוי בסימן של t מקדמי ה a_{ij} וגם

$$=\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\cdot t$$

הטענה נכונה אבל צריך להוכיח זאת. -5

$$t=\sum_{j_1=1}^{n}\dots\sum_{j_n=1}^{n}a_{1j_1}\dots a_{nj_n}\,d$$

(ב) הוכיחו: אם Δ פונק' נפח המתאפסת על בסיס כלשהו אזי Δ היא זהותית אפס.

<u>הוכחה:</u> Δ היא זהותית אפס אם לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in V$ $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$.

יהי $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ בסיס כך ש- $\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=0$.

לפי סעיף א' לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in V$ מתקיים $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=t\,\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$.

ו- t אינו תלוי ב- Δ. לכן

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=t\cdot 0=0$$

$\Leftarrow$ Δ היא זהותית אפס.

(ג) אם Δ פונ' נפח שאינה זהותית אפס
ו- $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in V$ אז $0\neq\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$
אמ"מ $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ בת"ל.

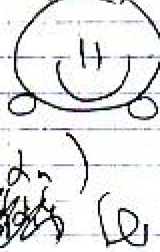
הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח $0\neq\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ובכל זאת
$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ תלויים לינארית. אזי בה"כ*
$\alpha_n=\sum_{i=1}^{n-1}a_i\alpha_i$ ואז

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\Delta\left(\alpha_1,\dots,\sum_{i=1}^{n-1}a_i\alpha_i\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}a_i\,\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_i)=0$$

כי לפי ו' יוצא שיש בסדרת הווקטורים שניים זהים.
מסתירה להנחה. $\Leftarrow$ $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ בת"ל.

($\Rightarrow$) נניח שהווקטורים הם בת"ל. אזי הם
בסיס של V. אם היה $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$
אזי לפי הסעיף הקודם $\Delta\equiv 0$.
בניגוד להנחה. $\Leftarrow$ $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq 0$.


מש"ל

* אחרת נחליף את הסדר שלהם ורק הסימן של $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$
ישתנה ובכל אופן "ישמר" $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq 0$