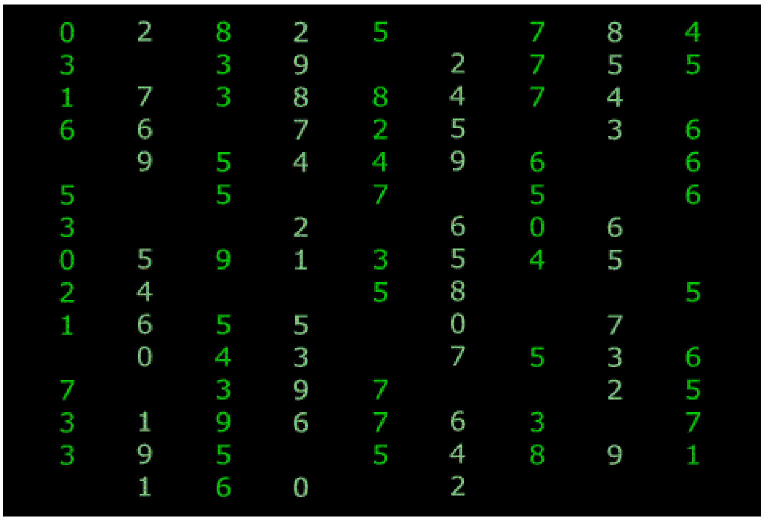
סיכומי גן-עדן מציגים...

אלגברה לינארית 2
Reloaded



סוכם, נכתב ועובד ע"י דינה זליגר

בהשראת:
מר **שמואל ברגר**
מר **אורן דינאי**
פרופ' **צליל סלע**
הספר המדהים **Carl D. Meyer**

תוכן עניינים

1. דטרמיננטות

1.1. תמורות

<u>הגדרה</u>: **תמורה** על הקבוצה $\{1,...,n\}$ היא פונקציה חח״ע ועל מקבוצה זו לעצמה. את קבוצת התמורות על $\{1,...,n\}$ נסמן ע״י S_n. תמורה $\sigma\in S_n$ נסמן $\sigma=\begin{pmatrix}1 & ... & n\\ \sigma(1) & ... & \sigma(n)\end{pmatrix}$. את תמורת הזהות $\begin{pmatrix}1 & ... & n\\ 1 & ... & n\end{pmatrix}$ נסמן ע״י ε.

<u>הערה</u>: נשים לב שכפי שידוע לנו ממתמטיקה דיסקרטית $|S_n|=n!$.

<u>הגדרה</u>: בהינתן תמורה $\sigma\in S_n$ זוג מספרים (i,j) נקרא **היפוך** אם $1\le i<j\le n$ ו- $\sigma(j)<\sigma(i)$. תמורה נקראת זוגית (אי זוגית) אם מספר ההיפוכים בה זוגי (אי זוגי). לכל תמורה $\sigma\in S_n$ נגדיר את **הסימן** של התמורה $N_\sigma=\begin{cases}1 & \sigma \text{ is even}\\ -1 & \sigma \text{ is odd}\end{cases}$.

<u>דוגמאות</u>:

1. נסתכל על התמורה $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$. אזי $\sigma(1)=3,\sigma(2)=1,\sigma(3)=2$.
2. בתמורת הזהות אין אף היפוך שכן לכל $1\le k\le n$ מתקיים $\varepsilon(k)=k$. לכן זוהי תמורה זוגית.
3. בתמורה $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ יש היפוך אחד $(1,2)$ ולכן זו תמורה אי זוגית.

<u>טענה</u>: לכל $\sigma\in S_n$ $N_\sigma=\prod_{i<j}\frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}$

<u>הוכחה</u>: $\frac{2-1}{\sigma(2)-\sigma(1)}\cdot...\cdot\frac{n-1}{\sigma(n)-\sigma(1)}\cdot...\cdot\frac{n-(n-1)}{\sigma(n)-\sigma(n-1)}=\prod_{i<j}\frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}*$

מאחר ש- σ תמורה מתקיים $\{1,...,n\}=\{\sigma(1),...,\sigma(n)\}$. לכן לכל $i<j$ קיימים $k<l$ כך ש- $i=\sigma(k),j=\sigma(l)$ או $i=\sigma(l),j=\sigma(k)$. לכן גם במונה וגם במכנה ב-(*) מופיעים אותם האיברים, אך אולי בהחלפת הסדר. מכאן שכל האיברים יצטמצמו ונקבל $\prod_{i<j}\frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}=\pm1$.

הסימן ייקבע לפי מספר ההיפוכים. אם $i=\sigma(k),j=\sigma(l)$ $\frac{j-i}{\sigma(l)-\sigma(k)}=1$ ואם $i=\sigma(l),j=\sigma(k)$ אז $\frac{j-i}{\sigma(l)-\sigma(k)}=-1$. לכן אם מספר ההיפוכים זוגי $\prod_{i<j}\frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}=1$ ואם מספר ההיפוכים אי זוגי נקבל $\prod_{i<j}\frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}=-1$. בקיצור $\prod_{i<j}\frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}=N_\sigma$. ☺

<u>הגדרה</u>: יהיו שתי תמורות $\sigma=\begin{pmatrix}1&\cdots&k&\cdots&l&\cdots&n\\ \sigma(1)&\cdots&\sigma(k)&\cdots&\sigma(l)&\cdots&\sigma(n)\end{pmatrix}$ ו-

$\sigma'=\begin{pmatrix}1&\cdots&k&\cdots&l&\cdots&n\\ \sigma(1)&\cdots&\sigma(l)&\cdots&\sigma(k)&\cdots&\sigma(n)\end{pmatrix}$. נאמר ש-$\sigma'$ התקבלה מ-σ ע"י **חילוף**.

<u>טענה</u>: אם σ' התקבלה מ-σ ע"י חילוף אזי $N_{\sigma'}=-N_\sigma$.

<u>הוכחה</u>: לפי טענה קודמת $N_\sigma=\prod_{i<j}\frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}$. σ' התקבלה מ-σ ע"י חילוף לכן קיימים $k<l$ כך ש-$\sigma'(k)=\sigma(l),\sigma'(l)=\sigma(k)$. אזי $\frac{l-k}{\sigma'(l)-\sigma'(k)}=-\frac{l-k}{\sigma(k)-\sigma(l)}=-\frac{l-k}{\sigma(l)-\sigma(k)}$. לכל $k<i<l$ קיים

$$\frac{i-k}{\sigma(i)-\sigma(k)}\cdot\frac{l-i}{\sigma(l)-\sigma(i)}=\frac{i-k}{\sigma'(i)-\sigma'(l)}\cdot\frac{l-i}{\sigma'(k)-\sigma'(i)}=$$
$$=\frac{i-k}{\sigma'(k)-\sigma'(i)}\cdot\frac{l-i}{\sigma'(i)-\sigma'(l)}=\frac{i-k}{\sigma'(i)-\sigma'(k)}\cdot\frac{l-i}{\sigma'(l)-\sigma'(i)}$$

לכן במכפלה $N_{\sigma'}=\prod_{i<j}\frac{j-i}{\sigma'(j)-\sigma'(i)}$ יהיה רק מוכפל אחד שבו ישתנה הסימן לעומת המכפלה $N_\sigma=\prod_{i<j}\frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}$. למעשה הסימן ישתנה בכל מוכפל שיש בו k או l אך כפי שראינו למעלה השינויים יבטלו זה את זה מלבד באיבר $\frac{l-k}{\sigma'(l)-\sigma'(k)}$. לכן $\prod_{i<j}\frac{j-i}{\sigma'(j)-\sigma'(i)}=-\prod_{i<j}\frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}$. כלומר $N_{\sigma'}=-N_\sigma$. ☺

<u>טענה</u>: תמורה σ היא זוגית (אי זוגית) אמ"מ ניתן לקבל ממנה את תמורת הזהות ע"י מספר זוגי (אי זוגי) של חילופים.
<u>הוכחה</u>: נוכיח למקרה של תמורה זוגית. לפי הטענה הקודמת כל חילוף הופך את הסימן של σ. לכן ביצוע של מספר זוגי של חילופים ישאיר את הסימן זהה ואילו ביצוע של מספר אי זוגי של חילופים יחליף את הסימן. ידוע ש-$N_\varepsilon=1$. לכן אם נבצע על ε מספר זוגי של היפוכים נקבל תמורה שבה $N_\sigma=1$ כלומר היא זוגית. ולהפך, אם σ אי זוגית והצלחנו להגיע ממנה ל-ε ע"י מספר זוגי של חילופים נקבל ש-$N_\varepsilon=-1$ וזו סתירה. לכן σ חייבת להיות זוגית. ☺

תמורות הן פונקציות ולכן ניתן להרכיב אותן. אם $\sigma,\tau\in S_n$ אז $(\sigma\circ\tau)(k)=\sigma(\tau(k))$. נשתמש במונחים מכפלה והרכבה בחופשיות. לפעמים אף נשמיט את סימן ההרכבה. בכל אופן אם לא תהיה ברורה הכוונה יופיע הסבר מפורש.

<u>דוגמאות</u>:

1. נסתכל על התמורות $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ ו-$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$. אזי $\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ אבל $\tau\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$. אז הרכבה של תמורות אינה קומוטטיבית. אבל זה גם היה ברור קודם לכן משום שהרכבה של העתקות איננה קומוטטיבית.
2. ניתן לחשב את ההרכבה $\sigma\circ\tau$ בקלות ע"י שינוי הסדר שבו רשומה σ. נסתכל על $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ ו-$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$. ברור שניתן גם לרשום $\sigma=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\3&4&1&2\end{pmatrix}$.
נרשום את התמורות אחת מתחת לשנייה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ מתקבלת ע״י מחיקת השורה האמצעית שבעצם קישרה בין שתי התמורות.

משום שלהעתקות חח״ע ועל קיימות העתקות הופכיות גם לכל תמורה σ קיימת תמורה הופכית σ^{-1}. ברור התמורה ההופכית מתקבלת פשוט ע״י היפוך השורות.

דוגמאות:

1. נסתכל על $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. אז $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. במקרה זה $\sigma=\sigma^{-1}$ אבל זה לא תמיד כך.
2. $\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ אז $\tau^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\neq\tau$

טענה:

1. הסימן הוא כפלי, כלומר $\operatorname{sign}(\sigma\circ\tau)=\operatorname{sign}\sigma\cdot\operatorname{sign}\tau$
2. σ זוגית אמ״מ σ^{-1} זוגית

הוכחה:

1. לפי טענה קודמת

$$\operatorname{sign}(\sigma\circ\tau)=\prod_{i<j}\frac{j-i}{(\sigma\circ\tau)(j)-(\sigma\circ\tau)(i)}=\prod_{i<j}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}\cdot\frac{j-i}{\tau(j)-\tau(i)}=$$

$$\overset{*}{=}\prod_{i<j}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}\cdot\prod_{i<j}\frac{j-i}{\tau(j)-\tau(i)}$$

נטען ש- $\prod_{i<j}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}=\operatorname{sign}\sigma$. ברור ש-

$\prod_{i<j}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}=\prod_{\substack{\{i,j\}\\ i\neq j}}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}$ משום שההבדל בין המכפלות האלה הוא

רק בסדר המוכפלים. כמו כן משום ש- τ תמורה $\prod_{\substack{\{i,j\}\\ i\neq j}}\frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}=\prod_{\substack{\{i,j\}\\ i\neq j}}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}$.

ובאותו אופן $\operatorname{sign}\sigma=\prod_{i<j}\frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}=\prod_{\substack{\{i,j\}\\ i\neq j}}\frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}$. לכן מ-*

$\operatorname{sign}(\sigma\circ\tau)=\operatorname{sign}\sigma\cdot\operatorname{sign}\tau$.

2. ידוע ש- $\operatorname{sign}\varepsilon=1$ וכן $\sigma\circ\sigma^{-1}=\varepsilon$. לכן לפי הסעיף הקודם $1=\operatorname{sign}(\sigma\circ\sigma^{-1})=\operatorname{sign}\sigma\cdot\operatorname{sign}\sigma^{-1}$. האפשרויות היחידות הן $\operatorname{sign}\sigma=\operatorname{sign}\sigma^{-1}=1$ או $\operatorname{sign}\sigma=\operatorname{sign}\sigma^{-1}=-1$. ☺

<u>הגדרה</u>: תהי $\sigma\in S_n$. אם $\{i_1^1,\dots,i_{k_1}^1\},\dots,\{i_1^p,\dots,i_{k_p}^p\}$ תת סדרות זרות של $(1,\dots,n)$ כך שלכל $1\le j\le p$ מתקיים $\sigma(i_1^j)=i_2^j,\dots,\sigma(i_{k_j-1}^j)=i_{k_j}^j,\sigma(i_{k_j}^j)=i_1^j$ אזי נרשום $\sigma=(i_1^1,\dots,i_{k_1}^1)\cdot\ldots\cdot(i_1^p,\dots,i_{k_p}^p)$ וכל תת סדרה סדורה $(i_1^j,\dots,i_{k_j}^j)$ נקראת **מעגל** (או **מחזור**). שני מעגלים ייקראו **זרים** אם קבוצות האיברים שלהם זרות.

<u>דוגמאות</u>:

1. בתמורה $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$ המעגלים הם $(1,2,3)$ ו-(4). לכן נרשום $\sigma=(1,2,3)(4)$ או רק $\sigma=(1,2,3)$ כאשר ברור שאם ידוע ש-$\sigma\in S_4$ אזי $\sigma(4)=4$.
2. $\sigma=(1,2,3)(4,5)$ אזי $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$
3. כפי שניתן לכפול תמורות כך גם ניתן לכפול מחזורים: $(1,3,4)(3,2,1)=(1,4)(2,3)$. וברור שכפי שכפל תמורות אינו קומוטטיבי גם כפל מחזורים אינו קומוטטיבי.

<u>טענה</u>: אם f,g מעגלים זרים אז $f\circ g=g\circ f$

<u>הוכחה</u>: נניח $f=(i_1,...,i_p),g=(j_1,...,j_q)$ זרים. יהי $1\le k\le n$. אם $k\in\{i_1,...,i_p\}$ אז קיים $1\le t\le p$ כך ש-$k=i_t$ ו-$f(k)=i_{t+1}$ אם $1\le t<p$ ו-$f(k)=i_1$ אחרת. בכל אופן אלה מספרים אשר אינם מופיעים ב-g ולכן $g(f(k))=i_{t+1}$ או $g(f(k))=i_1$. מצד שני i_t אינו מופיע ב-g ולכן $g(k)=k$ ולכן $f(g(k))=i_{t+1}$ או $f(g(k))=i_1$. כלומר $f(g(k))=g(f(k))$. באופן דומה מראים ש-$f\circ g=g\circ f$ גם במקרה ש-$k\in\{j_1,...,j_q\}$. אם $k\notin\{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q\}$ אז $f(g(k))=k=g(f(k))$. ☺

<u>הגדרה</u>: מעגל באורך 2 נקרא **חילוף**.

<u>טענה</u>: סימן של חילוף הוא -1.

<u>הוכחה א'</u>: נסתכל על החילוף (i,j). בה"כ $i<j$. אז התמורה היא בעצם $\sigma=\begin{pmatrix}1&\cdots&i&\cdots&j&\cdots&n\\1&\cdots&j&\cdots&i&\cdots&n\end{pmatrix}$. לכל $1\le k<l<i$ או $j<k<l\le n$ או $i<k<l<j$ k,l נשארים באותו הסדר. ההיפוכים הם (i,j) כמובן וכן לכל $i<k<j$ $(i,j),(k,j)$. כלומר לכל k יש שני היפוכים ובסוף נוסף גם (i,j). לכן סך כל ההיפוכים הוא אי זוגי. ☺

<u>הוכחה ב'</u>: נשים לב ש-σ התקבלה מ-ε ע"י חילוף. לפי טענה קודמת $N_\sigma=-N_\varepsilon=-1$. ☺

<u>טענה</u>: כל מעגל ניתן להציג כמכפלה של חילופים.

<u>הוכחה</u>: אם $f=(i_1,...,i_p)$ קל להיווכח ש-$f=(i_1,i_2)(i_2,i_3)...(i_{p-1},i_p)$. ☺

<u>מסקנה</u>: סימן מעגל באורך k הוא $(-1)^{k-1}$.

<u>מסקנה</u>: אם $\sigma\in S_n$ כתובה כמכפלת מעגלים אז הסימן שלה נקבע ע"י זוגיות מספר המעגלים באורך זוגי.

<u>דוגמאות</u>:

1. נחשב את הסימן של $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&2&7&4&5&1&6\end{pmatrix}$. ראשית נרשום את σ בכתיב מעגלים כך: $\sigma=(1,3,7,6)$. כעת נרשום זאת כמכפלה של חילופים כך: $\sigma=(1,3)(3,7)(7,6)$. יש פה שלושה חילופים ולכן $N_\sigma=(-1)^3=-1$.
2. $\mathrm{sign}[\underbrace{(y_1,y_2)}_{\text{even}}(i_1,i_2,i_3)\underbrace{(x_1,x_2,x_3,x_4)}_{\text{even}}]=(-1)^2=1$
3. נחשב את הסימן של $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\6&4&3&9&7&5&1&10&2&8\end{pmatrix}$. נרשום אותה בכתיב מעגלים: $\sigma=(1,6,5,7)(2,4,9)(8,10)$. יש פה 2 מחזורים באורך זוגי ולכן $N_\sigma=1$.

<u>הגדרה</u>: נאמר שהתמורה σ היא **מסדר 2** אם $\sigma=\sigma^{-1}$.

<u>דוגמאות</u>:
1. כל מעגל באורך 2 מקיים $(a,b)(a,b)=\varepsilon$ ולכן הוא מסדר 2.
2. כל מכפלה של מחזורים זרים באורך 2 היא מסדר 2. למשל $[(2,4)(3,5)][(2,4)(3,5)]=\varepsilon$ שהרי משום שמדובר במחזורים זרים המכפלה קומוטטיבית ואז $[(2,4)(3,5)][(3,5)(2,4)]=(2,4)[(3,5)(3,5)](2,4)=(2,4)\varepsilon(2,4)=(2,4)(2,4)=\varepsilon$.

<u>טענה</u>: כל תמורה ניתנת להצגה כמכפלה של שתי תמורות מסדר 2.
<u>הוכחה</u>: הוכחה גאומטרית ניתנה בתרגול (ר' <u>סיכום מתאריך 20.03.06</u>).

1.2. הדטרמיננטה

<u>הגדרה</u>: בהינתן מטריצה ריבועית $A\in M_n(F)$ הדטרמיננטה של A שתסומן $\det A$ או $|A|$ היא איבר בשדה F שמוגדר באופן הבא:

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}N_\sigma\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}$$

במקרה ש- $n=2$ אם $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ אז $\det A=ad-bc$

במקרה ש- $n=3$ אם $A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&a_{1,3}\\a_{2,1}&a_{2,2}&a_{2,3}\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\end{pmatrix}$ אז
$$\det A=\begin{matrix}+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}-a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}\\+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}-a_{1,2}a_{2,1}a_{33}\\+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}\end{matrix}$$

1.2.1. <u>תכונות הדטרמיננטה</u>

<u>טענה</u>: אם כופלים את אחת השורות במטריצה בסקלר אז הדטרמיננטה נכפלת באותו סקלר.
<u>הוכחה</u>: נניח שכפלנו את השורה ה- k במטריצה A בסקלר c:

$$B=\begin{pmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,n}\\\vdots&&\vdots\\ca_{k,1}&\cdots&ca_{k,n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n,1}&\cdots&a_{n,n}\end{pmatrix}$$

לפי הגדרת הדטרמיננטה

$$\det B=\sum_{\sigma\in S_n}N_\sigma\prod_{i=1}^{n}b_{i,\sigma(i)}=\sum_{\sigma\in S_n}N_\sigma b_{k,\sigma(k)}\prod_{i\neq k}b_{i,\sigma(i)}=\sum_{\sigma\in S_n}N_\sigma\left(ca_{k,\sigma(k)}\right)\prod_{i\neq k}a_{i,\sigma(i)}=$$
$$=c\sum_{\sigma\in S_n}N_\sigma a_{k,\sigma(k)}\prod_{i\neq k}a_{i,\sigma(i)}=c\sum_{\sigma\in S_n}N_\sigma\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}=c\det A$$

כלומר הדטרמיננטה נכפלת בסקלר. ☺

<u>טענה</u>: אם A היא מטריצה ריבועית ששורותיה לפי הסדר הן $\alpha_1,\dots,\alpha_k+\alpha_k',\dots,\alpha_n$, B מטריצה ששורותיה $\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n$ ו- C מטריצה ששורותיה $\alpha_1,\dots,\alpha_k',\dots,\alpha_n$ אז $\det A=\det B+\det C$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש- $\alpha_k = \left(a_{k,1},\dots,a_{k,n}\right), \alpha_k' = \left(a_{k,1}',\dots,a_{k,n}'\right)$. אז $\det B = \sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \left(\prod_{i\neq k} a_{i,\sigma(i)}\right) a_{k,\sigma(k)}$ ו- $\det C = \sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \left(\prod_{i\neq k} a_{i,\sigma(i)}\right) a_{k,\sigma(k)}'$. לכן

$$\det B + \det C = \sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \left(\prod_{i\neq k} a_{i,\sigma(i)}\right) a_{k,\sigma(k)} + \sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \left(\prod_{i\neq k} a_{i,\sigma(i)}\right) a_{k,\sigma(k)}' =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \left(\prod_{i\neq k} a_{i,\sigma(i)}\right)\left(a_{k,\sigma(k)} + a_{k,\sigma(k)}'\right) = \det A$$

וזה מה שרצינו. ☺

<u>טענה</u>: אם B מתקבלת מ- A ע״י החלפת שתי שורות שונות אז $\det B = -\det A$.
<u>הוכחה</u>: כל המחוברים ב- $\det B$ שווים בערכת המוחלט למחוברים של $\det A$. החילוף הופך את הזוגיות של כל התמורות ולכן הדטרמיננטה נכפלת ב- -1. ☺

<u>טענה</u>: אם יש ב- A שתי שורות שוות אז $\det A = 0$.
<u>הוכחה</u>: נחלק את ההוכחה לשני מקרים לפי המציין של השדה שמעליו אנו עובדים.
אם $\operatorname{char} F \neq 2$ אז נחליף את שתי השורות השוות ב- A ונקבל שוב את A. לפי הטענה הקודמת $\det A = -\det A$. כלומר $2\det A = 0$. מאחר שהמציין שונה מ- 2 נקבל ש- $\det A = 0$.
אם המציין הוא 2, נסתכל על ההגדרה של הדטרמיננטה. בה״כ שתי השורות השוות הן הראשונה והשנייה. אחרת לפי הטענה הקודמת נסדר את השורות כך שהשורות הזהות יהיו הראשונות ורק סימן הדטרמיננטה ישתנה. לכל תמורה σ קיימת תמורה τ כך ש- $\sigma(1) = \tau(2)$ ו- $\sigma(2) = \tau(1)$ ו $\sigma(k) = \tau(k)$ לכל $3 \le i \le n$. לכן ניתן לחלק את הסכום לשני חלקים – כל אחד על $\frac{n!}{2}$ תמורות.
נסמן את שתי קבוצות התמורות S ו- T.

$$\det A = \sum_{\sigma\in S} N_\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} + \sum_{\tau\in T} N_\tau \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)}$$

אם נסתכל על שני האיברים הראשונים בנפרד נקבל

$$\det A = \sum_{\sigma\in S} N_\sigma a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \prod_{i=3}^{n} a_{i,\sigma(i)} + \sum_{\tau\in T} N_\tau a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \prod_{i=3}^{n} a_{i,\tau(i)}$$

מאחר ש- $\operatorname{char} F = 2$ $-1 = 1$ ואם נזכור איך הגדרנו את הקבוצות S ו- T ונקבל ש-

$$\det A = \sum_{\sigma\in S} N_\sigma a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \prod_{i=3}^{n} a_{i,\sigma(i)} + \sum_{\tau\in T} N_\tau a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \prod_{i=3}^{n} a_{i,\tau(i)} =$$
$$= \sum_{\sigma\in S} \left(a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \prod_{i=3}^{n} a_{i,\sigma(i)} + a_{1,\sigma(2)} a_{2,\sigma(1)} \prod_{i=3}^{n} a_{i,\tau(i)} \right)$$

אבל $a_{1,\sigma(1)} = a_{2,\sigma(1)}$ ו- $a_{2,\sigma(2)} = a_{1,\sigma(2)}$. לכן $\det A = 2 \times \sum_{\sigma\in S} N_\sigma a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \prod_{i=3}^{n} a_{i,\sigma(i)}$. כלומר $\det A = 0$. ☺

<u>טענה</u>: אם יש ב- A שורת אפסים אז $\det A = 0$.
<u>הוכחה</u>: נכפול את שורת האפסים באפס ונקבל שוב את A. לפי טענה קודמת לגבי כפל שורה במטריצה בסקלר נקבל $\det A = 0 \cdot \det A = 0$. ☺

<u>טענה</u>: אם שורה במטריצה A היא כפולה של שורה אחרת אז $\det A = 0$.
<u>הוכחה</u>: בה״כ השורה הראשונה במטריצה היא מכפלה בסקלר של השורה השנייה. אזי לפי הטענה לגבי כפל שורה במטריצה בסקלר נקבל

$$\det A = \det \begin{pmatrix} ca_{1,1} & \cdots & ca_{1,n} \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = c \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = c \det B$$

אבל במטריצה B יש שתי שורות שוות ולכן לפי הטענה הקודמת

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = 0$$

כלומר $\det A = c \cdot 0 = 0$. ☺

<u>טענה</u>: הוספת שורה במטריצה לשורה אחרת אינה משנה את הדטרמיננטה.
<u>הוכחה</u>: תהי B המטריצה המתקבל מהוספת השורה ה- i במטריצה A לשורה ה- j שלה. תהי C המטריצה המתקבלת מ- A ע"י כתיבת השורה ה- i במקום השורה ה- j . כלומר:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j + \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

ב- C יש שתי שורות שוות ולכן $\det C = 0$. כמו כן לפי טענה קודמת $\det B = \det A + \det C$. כלומר $\det B = \det A$. ☺

<u>טענה</u>: אם במטריצה A מוסיפים לשורה אחת כפולה של שורה אחרת אז הדטרמיננטה לא משתנה.
<u>הוכחה</u>: תהי B המטריצה המתקבלת מהוספת מכפלת השורה ה- i ב- $c \in F$ במטריצה A לשורה ה- j שלה. תהי C המטריצה המתקבלת מ- A ע"י כתיבת מכפלת השורה ה- i ב- c במקום השורה ה- j . כלומר:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j + c\cdot\alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ c\cdot\alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

ב- C יש שורה שהיא מכפלה של שורה אחרת ולכן $\det C = 0$. כמו כן לפי טענה קודמת $\det B = \det A + \det C$. כלומר $\det B = \det A$. ☺

<u>דוגמאות</u>:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}\right| \underset{R_3=\vec{0}}{=} 0 \qquad \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 7 & 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right| \underset{R_3=2\cdot R_1}{=} 0$$

<u>טענה</u>: במטריצה אלכסונית הדטרמיננטה שווה למכפלת איברי האלכסון.

<u>הוכחה</u>: לפי הגדרת הדטרמיננטה $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$. נסתכל על תמורת הזהות בנפרד ונקבל:

$\det A=\sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = N_\varepsilon \prod_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{\varepsilon\neq\sigma\in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$. אבל אם $\sigma\neq\varepsilon$ אזי קיים $1\le i\le n$ כך ש- $\sigma(i)\neq i$. אבל מאחר שהמטריצה A אלכסונית עבור i כזה מתקבל $a_{i,\sigma(i)}=0$. לכן לכל $\sigma\neq\varepsilon$ $\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}=0$. כלומר $\det A = N_\varepsilon \prod_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{\varepsilon\neq\sigma\in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = 1\cdot\prod_{i=1}^n a_{i,i} + 0 = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$. ☺

<u>דוגמה</u>:
תהי I_n מטריצת היחידה מסדר n. ברור ש- $\det I_n = 1$ כי זוהי מטריצה אלכסונית שכל איברי האלכסון שלה הם 1. אבל $\det(-I_n)=(-1)^n$ משום שאם נסתכל על $-I_n$ כמטריצה I_n שאת כל אחת משורותיה כפלנו בסקלר -1 נקבל שאת הדטרמיננטה של I_n יש לכפול n פעמים ב- -1 כדי לקבל את הדטרמיננטה החדשה.

<u>טענה</u>: במטריצה משולשית עליונה הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון.

<u>הוכחה</u>: תהי $A=\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$. נסתכל על הגדרת הדטרמיננטה $\det A=\sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$. כמו בטענה הקודמת $\det A=\sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = N_\varepsilon \prod_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{\varepsilon\neq\sigma\in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$. לכל $\sigma\neq\varepsilon$ קיים $1\le i\le n$ כך ש- $\sigma(i)>i$. אבל במטריצה משולשית עליונה ל- i כזה מתקיים $a_{i,\sigma(i)}=0$. ולכן כמו בטענה הקודמת לכל $\sigma\neq\varepsilon$ $\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}=0$ ולכן $\det A = N_\varepsilon \prod_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{\varepsilon\neq\sigma\in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = 1\cdot\prod_{i=1}^n a_{i,i} + 0 = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.
☺

<u>הגדרה</u>: תהי $A\in M_{m,n}(F)$. **פעולות אלמנטריות** על A הן:
1. החלפת שתי שורות ב- A במקומן ($R_i\leftrightarrow R_j$)
2. הכפלת שורה כלשהי ב- A בסקלר $0\neq c\in F$ ($R_i\to cR_i$)
3. הוספת מכפלה של שורה כלשהי בסקלר לשורה אחרת ($R_i\to R_i+cR_j$)

<u>טענה</u>: $\det A=0$ אמ"מ שורות A תלויות.
<u>הוכחה</u>:
($\Leftarrow$) נניח בשלילה ששורות A אינן תלויות. אזי ע"י סדרת פעולות אלמנטריות ניתן לקבל מ- I את A [1]. ראשית ברור ש- $\det I = 1\neq 0$. נניח שאחרי $k-1$ פעולות אלמנטריות התקבלה המטריצה A' ו- $\det A'\neq 0$. נניח שהמטריצה שמתקבלת אחרי הפעולה ה- k היא B. אם הפעולה הייתה החלפת שתי שורות אז $\det B = -\det A \overset{IH}{\neq} 0$. אם הפעולה הייתה כפל שורה במטריצה בסקלר אז $\det B = c\det A'\neq 0$ שהרי לפי הנחת האינדוקציה $\det A'\neq 0$ מאחר שמדובר בפעולה אלמנטריות גם $c\neq 0$. אם הפעולה הייתה חיבור כפולה של שורה לשורה אחרת אז $\det B=\det A\overset{IH}{\neq}0$. בכל אופן הדטרמיננטה אינה מתאפסת. לכן לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל סדרת של פעולות אלמנטריות. בפרט עבור סדרה של פעולות אלמנטריות שבסופה תתקבל המטריצה המקורית A.
($\Rightarrow$) נניח ששורות A תלויות. אזי ע"י פעולות אלמנטריות ניתן להביא את A למטריצה עם שורת אפסים. נוכיח באינדוקציה על סדרת הפעולות ש- $\det A=0$. נניח שאחרי ביצוע $k-1$ פעולות אלמנטריות על A הדטרמיננטה של המטריצה שמתקבלת A' היא 0. נניח שאחרי הפעולה ה- k התקבלה המטריצה B. אם הפעולה הייתה החלפת שורות ומתקבלת מטריצה אז $\det B=-\det A'\overset{IH}{=}0$. אם הפעולה הייתה כפל שורה בסקלר c אז $\det B=c\det A'\overset{IH}{=}c\cdot 0=0$. אם הפעולה הייתה חיבור מכפלה של שורה בסקלר לשורה אחרת אז $\det B=\det A'\overset{IH}{=}0$. בכל אופן

[1] ע"י דירוג גאוס שנלמד בסמסטר הקודם

הדטרמיננטה נשארת אפס. לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל סדרת פעולות אלמנטריות ולכן נקבל $\det A = 0$. ☺

דוגמה:
בגלל שאנחנו יודעים איך פעולות אלמנטריות משפיעות על הדטרמיננטה זה מאפשר לנו לחשב בקלות דטרמיננטות של מטריצות מסדרים גבוהים: נדרג אותן ונזכור מה השינויים שעוברים על הדטרמיננטה.

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&6&2\end{pmatrix}\underset{R_2\to R_2-3R_1}{=}\det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\1&6&2\end{pmatrix}\underset{R_3\to R_3-R_1}{=}\det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\0&4&-1\end{pmatrix}=$$

$$\underset{R_3\to R_3+R_2}{=}\det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\0&0&-9\end{pmatrix}=1\cdot(-4)\cdot(-9)=36$$

הגדרה: תהי $A\in M_{m,n}(F)$. אזי **המטריצה המשוחלפת** של A היא המטריצה $(b_{i,j})=A^t\in M_{n,m}(F)$ המוגדרת ע"י $b_{i,j}=a_{j,i}$ לכל $1\le i\le n, 1\le j\le m$.

דוגמה:
תהי $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&7&9\\3&6&1\end{pmatrix}$. אזי $A^t=\begin{pmatrix}1&5&3\\2&7&6\\3&9&1\end{pmatrix}$ וכמובן $\left(A^t\right)^t=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&7&9\\3&6&1\end{pmatrix}=A$.

טענה: תהי $A\in M_n(F)$. אזי $\det A=\det A^t$.

הוכחה: לפי הגדרה של דטרמיננטה $\det A=\sum_{\sigma\in S_n}N_\sigma\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$. נניח ש-$A^t=(b_{i,j})$. אזי

$$\det A^t=\sum_{\sigma\in S_n}N_\sigma\prod_{i=1}^n b_{i,\sigma(i)}=\sum_{\sigma\in S_n}N_\sigma\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}\underset{\{\sigma(i)\}=\{1,\dots,n\}}{=}\sum_{\sigma\in S_n}N_\sigma\prod_{\{\sigma(i)\}}a_{\sigma(i),i}=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}N_\sigma\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma^{-1}(i)}\underset{N_\sigma=N_{\sigma^{-1}}}{=}\sum_{\sigma\in S_n}N_{\sigma^{-1}}\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma^{-1}(i)}=\sum_{\sigma^{-1}\in S_n}N_{\sigma^{-1}}\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma^{-1}(i)}=\det A$$

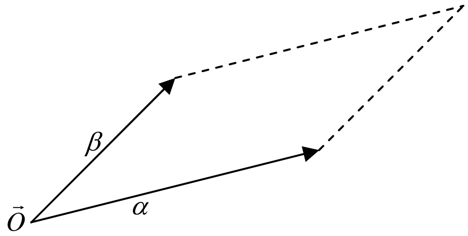
המעבר האחרון נכון מאחר שמדובר בתמורות וכל אחת נספרת פעם אחת בדיוק ולכל תמורה יש תמורה הופכית יחידה. לכן זה לא משנה אם אנחנו סוכמים על תמורות או על תמורות הופכיות. בכל אופן עוברים על כל התמורות והתוצאה אינה משתנה. ☺

מסקנות:
מהטענה הקודמת נובע שכל תכונות הדטרמיננטה שהוכחנו לגבי שורות של מטריצה נכונות גם עבור עמודות של מטריצה:

1. החלפת שתי עמודות במטריצה הופכת את סימן הדטרמיננטה.
2. במטריצה בעלת שתי עמודות שוות הדטרמיננטה היא אפס.
3. אם כופלים עמודה בסקלר אז הדטרמיננטה נכפלת באותו סקלר.
4. אם A מטריצה שעמודותיה $\gamma_1,\dots,\gamma_k,\dots,\gamma_n$, B מטריצה שעמודותיה $\gamma_1,\dots,\gamma_k',\dots,\gamma_n$ ו-C מטריצה שעמודותיה $\gamma_1,\dots,\gamma_k+\gamma_k',\dots,\gamma_n$ אזי $\det C=\det A+\det B$.
5. אם מבצעים פעולה אלמנטריות על עמודות המטריצה אזי השינוי בדטרמיננטה הוא כדלהלן:
   a. אם מחליפים שתי עמודות רק הסימן מתחלף.
   b. אם מוסיפים לעמודה כפולה של עמודה אחרת אין שינוי.
   c. אם כופלים עמודה בסקלר שונה מאפס הדטרמיננטה נכפלת באותו סקלר.
6. הדטרמיננטה שווה לאפס אמ"מ העמודות תלויות לינארית.
7. עבור מטריצה משולשית תחתונה הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון.

1.3. פונקציות נפח

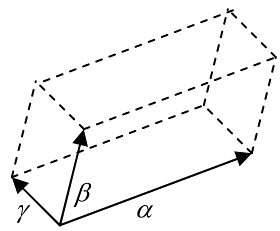
<u>דוגמה</u>:
נסתכל על שני וקטורים α,β במישור אשר יוצאים מאותה נקודה $\vec{O}$.



אנחנו מעוניינים בשטח המקבילית המתקבלת מהווקטורים האלה. אך נרצה לדבר על השטח כגודל בעל סימן ולכן גם ניתן משמעות למיקום הווקטורים אחד ביחס לשני, כלומר מדובר בזוג סדור של וקטורים $\langle\alpha,\beta\rangle$. את השטח של המקבילית שנוצרת על ידם נסמן $S(\alpha,\beta)$ כאשר α נמצא אחרי β לפי כיוון השעון.
תכונות השטח האלגברי של המקבילית:

1. $S(\alpha,\alpha)=0$
2. $S(t\alpha,\beta)=S(\alpha,t\beta)=tS(\alpha,\beta)$
3. $S(\alpha+\alpha',\beta)=S(\alpha,\beta)+S(\alpha',\beta)$ ו- $S(\alpha,\beta+\beta')=S(\alpha,\beta)+S(\alpha,\beta')$

<u>דוגמה</u>:
נסתכל במרחב התלת מימדי על מקבילון שנוצר ע"י שלושה וקטורים $\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$ היוצאים מנקודה אחת.



בצורה דומה למקרה הקודם תכונות הנפח האלגברי של המקבילון הן:

1. $S(\alpha,\beta,\alpha)=S(\alpha,\alpha,\beta)=S(\alpha,\beta,\beta)=0$
2. $S(t\alpha,\beta,\gamma)=S(\alpha,t\beta,\gamma)=S(\alpha,\beta,t\gamma)=tS(\alpha,\beta,\gamma)$
3. $S(\alpha+\alpha',\beta,\gamma)=S(\alpha,\beta,\gamma)+S(\alpha',\beta,\gamma)$
$S(\alpha,\beta+\beta',\gamma)=S(\alpha,\beta,\gamma)+S(\alpha,\beta',\gamma)$
$S(\alpha,\beta,\gamma+\gamma')=S(\alpha,\beta,\gamma)+S(\alpha,\beta,\gamma')$

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל השדה F. **פונקצית נפח** על V היא פונקציה $\Delta:V^n\to F$ המקיימת את התכונות הבאות:

1. אם קיימים $i\neq j$ כך ש- $\alpha_i=\alpha_j$ אז $\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n)=0$.
2. הומוגניות: לכל $\lambda\in F$ ולכל $1\le k\le n$ מתקיים $\Delta(\alpha_1,...,\lambda\alpha_k,...,\alpha_n)=\lambda\Delta(\alpha_1,...,\alpha_k,...,\alpha_n)$.
3. מולטילינאריות: לכל $1\le k\le n$ מתקיים
$\Delta(\alpha_1,...,\alpha_k+\alpha_k',...,\alpha_n)=\Delta(\alpha_1,...,\alpha_k,...,\alpha_n)+\Delta(\alpha_1,...,\alpha_k',...,\alpha_n)$.

<u>דוגמאות</u>:

- שטח מקבילית במישור ונפח מקבילון במרחב התלת-מימדי
- דטרמיננטה כאשר מסתכלים עליה כאילו פועלת על n שורות (או עמודות) המטריצה

- פונקצית האפס
- אם Δ פונקצית נפח אז גם לכל $\lambda \in F$ $\lambda\Delta$ פונקצית נפח.

<u>טענה</u>: תהי $\Delta : V^n \to F$ פונקצית נפח. אזי $\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) = -\Delta(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_i,...,\alpha_n)$.

<u>הוכחה</u>: נשתמש בתכונות של פונקצית נפח ונסתכל על $\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i+\alpha_j,...,\alpha_j+\alpha_i,...,\alpha_n)$. מצד אחד, לפי תכונה (1) $\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i+\alpha_j,...,\alpha_j+\alpha_i,...,\alpha_n)=0$. אבל מצד שני בשימוש בתכונה (3) פעמיים ותכונה (1) נקבל:

$$\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i+\alpha_j,...,\alpha_j+\alpha_i,...,\alpha_n) \overset{(3)}{=} \Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j+\alpha_i,...,\alpha_n) + \Delta(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_j+\alpha_i,...,\alpha_n) =$$

$$\overset{(3)}{=} \Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) + (\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_i,...,\alpha_n) + \Delta(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_j,...,\alpha_n) + \Delta(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_i,...,\alpha_n) =$$

$$\overset{(1)}{=} \Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) + 0 + 0 + \Delta(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_i,...,\alpha_n) =$$

$$= \Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) + \Delta(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_i,...,\alpha_n)$$

כלומר $0 = \Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) + \Delta(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_i,...,\alpha_n)$. נעביר אגפים ונקבל את הדרוש $\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) = -\Delta(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_i,...,\alpha_n)$. ☺

<u>טענה</u>: אם קיים $1 \le i \le n$ כך ש-$\alpha_i = \vec{0}$ אז $\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_n) = 0$.

<u>הוכחה</u>: כמו בטענה המקבילה לגבי דטרמיננטות, נכפול את α_i ב-0 ולפי תכונה (2) נקבל $\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_n) + \Delta(\alpha_1,...,\vec{0},...,\alpha_n) = \Delta(\alpha_1,...,0\cdot\vec{0},...,\alpha_n) = 0\cdot\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_n) = 0$. ☺

<u>טענה</u>: $\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j+c\alpha_i,...,\alpha_n) = \Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_n)$

<u>הוכחה</u>: לפי תכונות (2) ו-(3) נקבל

$$\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j+c\alpha_i,...,\alpha_n) = \Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) + \Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,c\alpha_i,...,\alpha_n) =$$

$$= \Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) + c\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_i,...,\alpha_n)$$

אבל לפי תכונה (1) $\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_i,...,\alpha_n) = 0$ ולכן

$\Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j+c\alpha_i,...,\alpha_n) = \Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) + c\cdot 0 = \Delta(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n)$. ☺

אנחנו רואים שלפונקציות נפח יש תכונות דומות לאלה של הדטרמיננטה. אך מה מייחד את הדטרמיננטה לעומת פונקציות נפח אחרות? נענה על שאלה זו בטענה הבאה.

<u>טענה</u>: יש פונקצית נפח אחת ויחידה הנותנת את הערך 1 למטריצת היחידה וזו הדטרמיננטה.
<u>הוכחה</u>:
קיום: אכן קיימת פונקצית הדטרמיננטה כפי שהגדרנו אותה קודם. ברור שהיא פונקצית נפח מהטענות שהוכחנו וכן מתקיים $\det I = 1$.
יחידות: תהי Δ פונקצית נפח הנותנת למטריצת היחידה את הערך 1. נראה ש-$\Delta = \det$. נראה שלכל $A \in M_n(F)$ מתקיים $\Delta(A) = \det A$ (כאשר $\Delta(A)$ היא Δ על סדרת שורות המטריצה A) ומכאן תנבע הטענה. נסתכל על מספר מקרים.
אם A רגולרית ניתן לקבל אותה ע"י סדרה של פעולות אלמנטריות על I. נוכיח את הטענה באינדוקציה על סדרת הפעולות. ראשית אם $A = I$ אז לפי הנתון $\Delta(A) = 1 = \det A$. כעת נניח שלכל סדרה של לכל היותר $k-1$ פעולות אלמנטריות $\Delta A' = \det A'$ כאשר A' המטריצה שהתקבלה אחרי הפעולות. כעת נוכיח שאחרי צעד נוסף עדיין הפונקציות מתלכדות. תהי B המטריצה שהתקבלה אחרי פעולה אלמנטרית נוספת. אם הפעולה הייתה החלפת שתי שורות אז $\Delta(B) \overset{(1)}{=} -\Delta(A') \overset{IH}{=} -\det A' = \det B$. אם הפעולה הייתה מכפלת שורה בסקלר λ אז $\Delta(B) \overset{(2)}{=} \lambda\Delta(A') \overset{IH}{=} \lambda\det A' = \det B$. אם הפעולה הייתה הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת

אזי לפי הטענה הקודמת $\Delta(B)=\Delta(A')\overset{IH}{=}\det A'=\det B$. לכן לפי עיקרון האינדוקציה לכל $A\in M_n(F)$ רגולרית $\Delta(A)=\det A$.
אם A סינגולרית אזי היא מתקבלת ע"י סדרה סופית של פעולות אלמנטריות ממטריצה B בעלת שורת אפסים. לפי טענה קודמת עבור מטריצה זו $\Delta(B)=0=\det B$. כעת באופן זהה להוכחה של המקרה הקודם לכל מטריצה סינגולרית $A\in M_n(F)$ מתקיים $\Delta(A)=\det A$. לכן $\Delta=\det$. ☺

<u>טענה</u>: יהי $c\in F$. אזי יש פונקצית נפח אחת ויחידה הנותנת את הערך c למטריצת היחידה וזו הפונקציה $\Delta(A)=c\cdot\det A$. בפרט אם $c=0$ אזי פונקצית האפס היא הפונקציה היחידה שמתאפסת עבור מטריצת היחידה.
<u>הוכחה</u>: זהה להוכחה של הטענה הקודמת.

<u>מסקנה</u>: כל פונקציות הנפח הן מהצורה $\Delta=c\cdot\det$ כאשר $c\in F$.
<u>הוכחה</u>: תהי Δ פונקצית נפח ויהי $c=\Delta(I)$. לפי הטענה הקודמת יש פונקצית נפח יחידה שמקיימת זאת והיא $c\cdot\det$. ☺

<u>טענה</u>: תהי Δ פונקצית נפח ויהיו $c_1,\dots,c_m\in F$. אז

$$\Delta\left(\alpha_1,\dots,\sum_{l=1}^{m}c_l\alpha_k^l,\dots,\alpha_n\right)=\sum_{l=1}^{m}c_l\Delta\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k^l,\dots,\alpha_n\right).$$

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על m.
עבור $m=1$ הטענה נובעת מההומוגניות של פונקציות נפח.
נניח עבור m ונוכיח עבור $m+1$:

$$\Delta\left(\alpha_1,\dots,\sum_{l=1}^{m+1}c_l\alpha_k^l,\dots,\alpha_n\right)=\Delta\left(\alpha_1,\dots,\sum_{l=1}^{m}c_l\alpha_k^l+c_{m+1}\alpha_k^{m+1},\dots,\alpha_n\right)=$$
$$\overset{(3)}{=}\Delta\left(\alpha_1,\dots,\sum_{l=1}^{m}c_l\alpha_k^l,\dots,\alpha_n\right)+\Delta\left(\alpha_1,\dots,c_{m+1}\alpha_k^{m+1},\dots,\alpha_n\right)=$$
$$\overset{IH}{=}\sum_{l=1}^{m}c_l\Delta\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k^l,\dots,\alpha_n\right)+\Delta\left(\alpha_1,\dots,c_{m+1}\alpha_k^{m+1},\dots,\alpha_n\right)=$$
$$\overset{(2)}{=}\sum_{l=1}^{m}c_l\Delta\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k^l,\dots,\alpha_n\right)+c_{m+1}\Delta\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k^{m+1},\dots,\alpha_n\right)=\sum_{l=1}^{m+1}c_l\Delta\left(\alpha_1,\dots,\alpha_k^l,\dots,\alpha_n\right)$$

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $m\in\mathbb{N}$. ☺

1.4. פיתוח דטרמיננטה לפי שורה (טור)

<u>הגדרה</u>: תהי $A\in M_n(F)$ עבור $n>1$. תהי $A_{i,j}\in M_{n-1}(F)$ המטריצה המתקבלת מ-A ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j. **המינור** $m_{i,j}$ מוגדר ע"י $m_{i,j}=\det A_{i,j}$.

<u>דוגמאות</u>:
נניח ש-$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$. אזי $A_{1,2}=\begin{pmatrix}4&6\\7&9\end{pmatrix}$ ו-$m_{1,2}=\det\begin{pmatrix}4&6\\7&9\end{pmatrix}=4\cdot9-6\cdot7=-6$.
אם $A=\begin{pmatrix}1&2\\5&9\end{pmatrix}$ אז $A_{1,1}=(9)$ ו-$m_{1,1}=9$.

<u>משפט פיתוח דטרמיננטה לפי השורה ה- i</u>: תהי $A \in M_n(F)$ עם $n > 1$. אזי $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} m_{i,j}$.

<u>הוכחה</u>: בה"כ $i = 1$. אם לא, נבעבע את השורה ה- i למעלה כך שתתקבל המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

לצורך כך נצטרך לבצע $i-1$ פעולות החלפה ולכן $\det B = (-1)^{i-1} \det A$. מצד שני נפתח את $\det B$ לפי השורה הראשונה ונקבל $\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1,j} m_{1,j}^{B}$. נשים לב ש- $m_{1,j}^{B} = m_{i,j}^{A}$ והרי $a_{i,j} = b_{1,j}$. לכן $(-1)^{i-1} \det A = \det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{i,j} m_{i,j}^{A}$. כלומר $\det A = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{i,j} m_{i,j}^{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} m_{i,j}^{A}$ וזה הפיתוח של $\det A$ לפי השורה ה- k.

נוכיח אם כן ש- $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} m_{1,j}$. לכל $1 \le j \le n$ יהי ε_j וקטור השורה שבו במקום ה- j מופיע 1 ובשאר המקומות מופיע 0. תחת סימון זה השורה הראשונה ב- A היא אינה אלא $(a_{1,1},...,a_{1,n}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \varepsilon_j$. לכל $1 \le j \le n$ נסמן ב- A^j את המטריצה שהתקבלה מ- A ע"י החלפת השורה הראשונה ב- ε_j. לפי טענה קודמת, משום שהדטרמיננטה היא פונקצית נפח, מתקיים $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \det A^j$. אם נראה ש- $\det A^j = (-1)^{1+j} m_{1,j}$ תתקבל הטענה.

בה"כ $j = 1$. אם לא, נשתמש בהחלפת עמודות כדי לבעבע את העמודה ה- j למקום העמודה הראשונה ונקבל את המטריצה

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,j} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,j} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

לצורך בעבוע זה נצטרך $j-1$ החלפות עמודות. לכן $\det B^1 = (-1)^{j-1} \det A^j$ או $\det A^j = (-1)^{j+1} \det B^1$. ואם $\det B^1 = (-1)^{1+1} m_{1,1}^{B} = m_{1,1}^{B}$ נשים לב ש- $m_{1,1}^{B} = m_{1,j}^{A}$ ונקבל $\det A^j = (-1)^{j+1} m_{1,1}^{B} = (-1)^{j+1} m_{1,j}^{A}$.

נראה אם כן ש- $\det A^1 = m_{1,1}$. נניח ש- $A^1 = (a_{i,j}')$. לפי הגדרת הדטרמיננטה $\det A^1 = \sum_{\sigma \in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}'$. נשים לב שאם $\sigma(1) \ne 1$ אזי $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}' = 0$ ולכן לדטרמיננטה יתרמו רק התמורות שמקיימות $\sigma(1) = 1$, כלומר $\det A^1 = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} N_\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}' = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} N_\sigma a_{1,1}' \prod_{i=2}^{n} a_{i,\sigma(i)}' = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} N_\sigma 1 \cdot \prod_{i=2}^{n} a_{i,\sigma(i)}' = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} N_\sigma \prod_{i=2}^{n} a_{i,\sigma(i)}'$. נסמן $S_{n-1}' = \{2,...,n\}$. לכל תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש- $\sigma(1) = 1$ מתאימה תמורה אחת ויחידה $\sigma' \in S_{n-1}'$ כך ש- $\sigma(k) = \sigma'(k)$ לכל $2 \le k \le n$. כמו כן ברור ש- $N_\sigma = N_{\sigma'}$ משום ש- 1 אינו משתתף בחילופים. לכן $\det A^1 = \sum_{\sigma' \in S_{n-1}'} N_{\sigma'} \prod_{i=2}^{n} a_{i,\sigma'(i)}' = m_{1,1}$.

כלומר אכן $\det A^1 = m_{1,1}$. מכאן ש- $\det A^j = (-1)^{1+j} m_{1,j}$ ו- $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \det A^j$. ולכן

$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} m_{i,j}$. ☺

<u>דוגמאות</u>:

1. נפתח את הדטרמיננטה של $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ לפי השורה הראשונה ונקבל

$$\det A = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1,j} m_{1,j} = (-1)^{1+1} a_{1,1} m_{1,1} + (-1)^{1+2} a_{1,2} m_{1,2} = 1\cdot a\cdot d - 1\cdot b\cdot c = ad - bc$$

נפתח לפי השורה השנייה ונקבל

$$\det A = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{2+j} a_{2,j} m_{2,j} = (-1)^{2+1} a_{2,1} m_{2,1} + (-1)^{2+2} a_{2,2} m_{2,2} = -1\cdot c\cdot b + 1\cdot d\cdot a = ad - bc$$

2. נפתח את הדטרמיננטה של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ לפי השורה השנייה:

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} a_{2,j} m_{2,j} = (-1)^{2+1} a_{2,1} m_{2,1} + (-1)^{2+2} a_{2,2} m_{2,2} + (-1)^{2+3} a_{2,3} m_{2,3} =$$

$$= -5\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 4\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (-5)\cdot(-5) + 4\cdot(-4) - 3\cdot(-1) = 12$$

<u>משפט פיתוח דטרמיננטה לפי הטור ה- j</u>: תהי $A \in M_n(F)$ עם $n > 1$. אזי

$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} m_{i,j}$.

<u>הוכחה</u>: ראינו ש- $\det A = \det A^t$. נניח ש- $A^t = (b_{i,j})$. נפתח את $\det A^t$ לפי השורה ה- j ונקבל

$\det A^t = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} b_{j,i} m_{j,i}^{A^t}$. אבל $b_{j,i} = a_{i,j}$ ו- $m_{j,i}^{A^t} = m_{i,j}$. לכן $\det A^t = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{i,j} m_{i,j}$. כלומר

$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} m_{i,j}$. ☺

<u>טענה</u>: תהי $A = (a_{i,j}) \in M_n(F)$ ויהי $1 \le k \le n$. אזי $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{i,j} m_{k,j} = 0$ לכל $i \ne k$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר מטריצה A' באופן הבא:

$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,n} \end{pmatrix}$ כלומר רשמנו את השורה ה- i במקום השורה ה- k

ברור ש- $\det A' = 0$. מצד שני נפתח לפי השורה ה- k ונקבל

$$0 = \det A' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} m_{k,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{i,j} m_{k,j}$$

כאשר השוויון האחרון נכון משום ש- $a_{k,j}$ של המטריצה A' שווה ל- $a_{i,j}$ של המטריצה המקורית A. ☺

<u>הגדרה</u>: תהי $A=(a_{i,j})\in M_n(F)$. נגדיר את **המטריצה המצורפת** $\operatorname{Adj} A=(b_{i,j})\in M_n(F)$ כאשר לכל $1\le i,j\le n$ מתקיים $b_{i,j}=(-1)^{i+j}m_{j,i}$.

<u>דוגמה</u>:

אם $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ אז $\operatorname{Adj} A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$. נשים לב ש- $A\operatorname{Adj} A=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc\end{pmatrix}$.

<u>טענה</u>: תהי $A=(a_{i,j})\in M_n(F)$. אזי $A\operatorname{Adj} A=|A|I$

<u>הוכחה</u>: נחשב את $A\operatorname{Adj} A$ באופן ישיר:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & (-1)^{1+n}m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}m_{n,1} & \cdots & m_{n,n}\end{pmatrix}=(b_{i,j})$$

לכל $1\le i,j\le n$ מתקיים $b_{i,j}=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{j+l}a_{i,l}m_{j,l}$. אם $i=j$ אז מתקבל $b_{i,j}=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{i+l}a_{i,l}m_{i,l}$ וזו נוסחת הפיתוח של $\det A$ לפי השורה ה- i. לעומת זאת לפי הטענה הקודמת אם $i\ne j$ אז $b_{i,j}=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{j+l}a_{i,l}m_{j,l}=0$. לכן על האלכסון הראשי מופיעה $\det A$ ובשאר המקומות 0. כלומר $A\operatorname{Adj} A=|A|I$. ☺

<u>מסקנה</u>: אם A סינגולרית אזי $A\operatorname{Adj} A=\tilde{0}$ ואילו אם A רגולרית אזי $A^{-1}=|A|^{-1}\operatorname{Adj} A$.

1.5. תכונות נוספות של דטרמיננטות

<u>שיטת קרמר לפתרון מערכת משוואות</u>: תהי $A\in M_n(F)$ ותהי $A\underline{x}=\underline{b}$ מערכת משוואות לינאריות.

אם A הפיכה אזי יש למערכת פתרון יחיד $\underline{c}$ כך שלכל $1\le k\le n$ $c_k=\frac{|A_k|}{|A|}$ כאשר A_k המטריצה המתקבלת מ- A ע"י החלפת העמודה ה- k ב- $\underline{b}$.

<u>הוכחה א'</u>: ידוע שאם A הפיכה אזי קיים פתרון יחיד למערכת המשוואות $A\underline{x}=\underline{b}$ והוא $\underline{c}=A^{-1}\underline{b}$. נניח ש- $\underline{c}=(c_1,\dots,c_n)$. נסמן את העמודות של A ב- $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ כלומר $A=(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n)$. לכן $A_k=(\alpha_1,\dots,a_{k-1},\underline{b},\alpha_{k+1},\dots\alpha_n)$. אבל $A\underline{c}=\underline{b}$, כלומר $c_1\alpha_1+\dots+c_n\alpha_n=\underline{b}$ ולכן $A_k=\left(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n\right)$. לפי טענה קודמת $\det A_k=\sum_{i=1}^{n}c_i\det(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_i,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n)$. ברור שאם $i\ne k$ אז $\det(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_i,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n)=0$ כי אז $(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_i,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n)$ מטריצה עם שתי שורות שוות. לכן $\det A_k=c_k\det(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_k,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n)=c_k\det A$. $\det A\ne 0$ כי A רגולרית ולכן $c_k=\frac{|A_k|}{|A|}$. ☺

<u>הוכחה ב'</u>: נניח $(c_1,\dots,c_k)$ הוא פיתרון של $A\underline{x}=\underline{b}$. נציב ונקבל ש-

$$\begin{aligned} a_{1,1}c_1+\dots+a_{1,n}c_n&=b_1\\ &\vdots\\ a_{n,1}c_1+\dots+a_{n,n}c_n&=b_n\end{aligned}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$a_{1,1}c_1+\ldots+a_{1,n}c_n+(-1)b_1=0$$
$$\vdots$$
$$a_{n,1}c_1+\ldots+a_{n,n}c_n+(-1)b_n=0$$

לכן $(c_1,\ldots,c_n-1)$ הוא פיתרון של מערכת המשוואות ההומוגנית $(A,b)\underline{x}=0$, כלומר של מערכת n המשוואות ב-$n+1$ נעלמים:

$$a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n+b_1x_{n+1}=0$$
$$\vdots$$
$$a_{n,1}x_1+\ldots+a_{n,n}x_n+b_nx_{n+1}=0$$

עבור k כלשהו נוסיף עוד משוואה כדי לקבל $n+1$ משוואות ב-$n+1$ נעלמים:

$$a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n+b_1x_{n+1}=0$$
$$\vdots$$
$$a_{n,1}x_1+\ldots+a_{n,n}x_n+b_nx_{n+1}=0$$
$$0\cdot x_1+\ldots+1\cdot x_k+\ldots+0\cdot x_n+c_kx_{n+1}=0$$

למערכת משוואות זו $A'\underline{x}=0$ יש פיתרון לא טריוויאלי $(c_1,\ldots,c_n,-1)$ בנוסף לפיתרון הטריוויאלי, כלומר הפיתרון שלה לא יחיד ולכן $\det A'=0$. מצד שני נחשב את $\det A'$ בצורה אחרת.

$$A'=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n} & b_n \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & c_k \end{pmatrix}$$

נחסר מהעמודה האחרונה c_k פעמים את העמודה ה-k. ידוע שזה לא משפיע על הדטרמיננטה ולכן נקבל

$$\det A'=\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} & b_1-c_ka_{1,k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n} & b_n-c_ka_{n,k} \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת נחליף את העמודה האחרונה עם העמודה ה-k ולאחר מכן נכפיל אותה ב--1. לכן הדטרמיננטה לא משתנה ונקבל ש-

$$\det A'=\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & c_ka_{1,k}-b_1 & \cdots & a_{1,n} & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & c_ka_{n,k}-b_n & \cdots & a_{n,n} & a_{n,k} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אם נפתח את הדטרמיננטה לפי השורה האחרונה נקבל ש-

$$\det A'=\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & c_ka_{1,k}-b_1 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & c_ka_{n,k}-b_n & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

לפי תכונות הדטרמיננטה $\det A'=c_k\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

כלומר $0=c_k\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}=c_k\det A-\det A_k$. נעביר אגפים ונקבל $c_k=\dfrac{|A_k|}{|A|}$. ☺

<u>משפט המכפלה</u>: יהיו $A,B\in M_n(F)$. אזי $\det AB=\det A\det B$.

<u>הוכחה</u>: ראשית נוכיח ש- $\det EA=\det E\det A$ עבור A כלשהי ו- E מטריצה אלמנטרית לפי שורות[2]. ידוע שאם E אלמנטרית אז EA היא המטריצה שמתקבלת מ- A ע"י הפעלת אותה פעולה אלמנטרית על שורות A כמו שהפעילו על I כדי לקבל את E. כעת לפי תכונות הדטרמיננטה נראה את הדרוש. אם הפעולה הייתה החלפת שורות אז $\det E=-1$ ו- EA מתקבלת מ- A ע"י החלפת שורות לכן $\det EA=-\det A=\det E\det A$. אם הפעולה הייתה כפל שורה בסקלר c אז $\det E=c$ ו- EA התקבל מ- A ע"י כפל שורה באותו סקלר c ולכן $\det EA=c\det A=\det E\det C$. אם הפעולה הייתה חיבור מכפלה של שורה אחת לשורה אחרת אזי $\det E=1$ ו- EA התקבלה מ- A ע"י חיבור מכפלה של שורה לשורה אחרת ולכן $\det EA=\det A=\det E\det A$. בכל אופן $\det EA=\det E\det A$.

נחזור כעת למקרה הכללי. אם אחת מבין A,B אינה הפיכה אזי $\det A=0$ או $\det B=0$ ולכן $\det A\det B=0$. כמו כן AB הפיכה אמ"מ גם A וגם B הפיכות. לכן AB אינה הפיכה ולכן $\det AB=0$ כלומר $\det AB=\det A\det B$.

אם גם A וגם B הפיכות אזי ניתן לקבל אותן ע"י סדרות סופיות של פעולות שורה אלמנטריות ממטריצת היחידה I. כלומר $A=\prod_{i=1}^{k}E_i^A$ ו- $B=\prod_{j=1}^{l}E_j^B$ כאשר $\left\{E_i^A,E_j^B\right\}$ אלמנטריות. לפי מה שהראינו בתחילת ההוכחה ניתן להראות באינדוקציה שלכל סדרה של מטריצות אלמנטריות $E_1,...,E_m$ מתקיים $\det\left(\prod_{i=1}^{m}E_i\right)=\prod_{i=1}^{m}\det E_i$. לכן

$$\det AB=\det\left(\prod_{i=1}^{k}E_i^A\prod_{j=1}^{l}E_j^B\right)=\prod_{i=1}^{k}\det\left(E_i^A\right)\prod_{j=1}^{l}\det\left(E_j^B\right)=\det A\det B .$$ ☺

<u>מסקנה</u>: $\det\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}=\det A\cdot\det C$ אם A,C מטריצות ריבועיות.

<u>הגדרה</u>: נאמר שהמטריצות $A,B\in M_n(F)$ **דומות** אם קיימת מטריצה רגולרית P כך ש- $A=P^{-1}BP$. למעשה זה אומר שהמטריצות מייצגות את אותה העתקה לינארית לפי בסיסים שונים ו- P היא מטריצת מעבר הבסיסים.

<u>הערה</u>: ברור שדמיון הוא יחס שקילות.

<u>מסקנות</u>:
1. לכל $A,B\in M_n(F)$ מתקיים $\det AB=\det BA$
2. אם A רגולרית אזי $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$
3. אם A ו- B דומות אזי יש להן אותה דטרמיננטה

<u>הוכחה</u>:
1. לפי משפט המכפלה וקומוטטיביות בשדה נקבל ש- $\det AB=\det A\det B=\det B\det A=\det BA$.
2. אם A רגולרית אזי $AA^{-1}=I$ ולפי משפט המכפלה $1=\det I=\det AA^{-1}=\det A\det A^{-1}$. ולכן $\det A\neq 0$ ולכן $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$.
3. אם A ו- B דומות אזי קיימת P הפיכה כך ש- $A=P^{-1}BP$. לפי משפט המכפלה ובשימוש בסעיף הקודם $\det A=\det P^{-1}BP=\det P^{-1}\det B\det P=(\det P)^{-1}\det B\det P=\det B$. ☺

<u>הערה</u>: אם לשתי מטריצות A,B יש אותה דטרמיננטה, אין הדבר אומר שהן מייצגות את אותה ההעתקה. למשל $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1$ וגם $\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1$, אבל ברור שהמטריצות אינן דומות.

---

[2] מטריצה שהתקבלה ממטריצת היחידה ע"י פעולה אלמנטרית אחת על שורותיה.

<u>תזכורת</u>: תהי $A \in M_{m,n}(F)$. דרגת השורות $\text{rank}_R A$ היא המספר המקסימלי של שורות בת״ל ב- A. באופן דומה דרגת העמודות $\text{rank}_C A$ היא המספר המקסימלי של עמודות בת״ל ב- A.
בסמסטר הקודם הוכחנו ש- $\text{rank}_R A = \text{rank}_C A$ וקראנו למספר זה דרגת המטריצה $\text{rank } A$.

<u>הגדרה</u>: תהי $A \in M_{m,n}(F)$. נאמר ש- A' היא מטריצה חלקית של A אם קיימות תת סדרות $(i_k),(j_l)$ של $(1,...,m),(1,...,n)$ בהתאמה כך ש- A' היא חיתוך השורות (i_k) והעמודות (j_l) של A.

<u>דוגמה</u>:

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$. אזי המטריצה $A' = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 12 & 15 \\ 17 & 20 \end{pmatrix}$ היא מטריצה חלקית ל- A שהתקבלה משורות $(1,3,4)$ ומעמודות $(2,5)$.

<u>משפט</u>: תהי מטריצה $A \in M_{m,n}(F)$. אזי:

1. דרגת השורות של המטריצה A שווה למספר המקסימלי של שורות במטריצה ריבועית חלקית בעלת דטרמיננטה שונה מאפס.
2. דרגת העמודות של המטריצה A שווה למספר המקסימלי של עמודות במטריצה ריבועית חלקית בעלת דטרמיננטה שונה מאפס.

<u>הוכחה</u>: נוכיח רק את (1) ברור שאת (2) מוכיחים בצורה דומה או שאפשר להסתכל על A^t.
נחלק את ההוכחה לשלושה חלקים:

1. אם יש r שורות בת״ל אז יש מטריצה ריבועית חלקית עם r שורות שהדטרמיננטה שלה שונה מאפס:
בה״כ r השורות הבת״ל הן $\alpha_1,...,\alpha_r$. אחרת נחליף את סדר השורות וברור שפעולה זו לא משנה את דרגת השורות של המטריצה. נשלים שורות אלה לבסיס של F^n ע״י הוספה של וקטורים מהבסיס הסטנדרטי[3]. נגדיר מטריצה $B \in M_n(F)$ באופן הבא: r שורותיה הראשונות הן $\alpha_1,...,\alpha_r$ ואילו שאר שורותיה הן שאר איברי הבסיס. חילופי עמודות לא משנים את דרגת השורות של המטריצה ולכן ניתן להניח בה״כ ש- B היא מהצורה:

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{r,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

כאן $a_{i,j}$ אינם האיברים המקוריים של המטריצה A אלא האיברים של B אחרי סידור מחדש (אם היה נחוץ).

ברור ש- $\det B \neq 0$ כי כל השורות בת״ל. נסמן B^k המטריצה שמתקבלת מ- B ע״י מחיקת כל השורות והטורים החל מהשורה והעמודה ה- k. נפתח את $\det B$ לפי השורה האחרונה ונקבל:

$$\det B = 1 \cdot \det B^n = 1 \cdot 1 \cdot \det B^{n-1} = ... = 1^{n-r} \det B^{r+1} = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} \end{pmatrix}$$

---

[3] לפי משפט מהסמסטר הקודם אם $V = \text{span}\{v_1,...,v_m\}$ ו- $\{u_1,...,u_k\}$ קבוצה בת"ל של וקטורים ב- V אזי ניתן להשלים אותה לבסיס ע"י וקטורים מתוך $\{v_1,...,v_m\}$.

כלומר $\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r}\end{pmatrix} \neq 0$. נחזיר כעת את השורות והעמודות לסדר המקורי שלהן ונקבל שמצאנו מטריצה ריבועית חלקית מסדר $r\times r$ שהדטרמיננטה שלה שונה מאפס.

2. אם יש מטריצה ריבועית חלקית מסדר $r\times r$ שהדטרמיננטה שלה שונה מאפס אז יש r שורות בת"ל:
בה"כ המטריצה החלקית היא $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r}\end{pmatrix}$. שורות מטריצה חלקית זו הן בת"ל. ולכן r השורות הראשונות של A - $\alpha_1,...,\alpha_r$ בת"ל גם הן. נניח ש- $\sum_{i=1}^{r} c_i\alpha_i = 0$. כלומר $\underbrace{(0,...,0)}_{n\text{ elements}} = \sum_{i=1}^{r} c_i\left(a_{i,1},...,a_{i,n}\right) = \left(\sum_{i=1}^{r} c_i a_{i,1},...,\sum_{i=1}^{r} c_i a_{i,n}\right)$. אבל מכך ששורות $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r}\end{pmatrix}$ בת"ל נובע שאם $\left(\sum_{i=1}^{r} d_i a_{i,1},...,\sum_{i=1}^{r} d_i a_{i,r}\right) = \underbrace{(0,...,0)}_{r\text{ elements}}$ אז $d_i = 0$ לכל $1\le i\le r$. לכן $c_i = 0$ לכל $1\le i\le r$.

3. דרגת השורות של המטריצה A שווה למספר המקסימלי של שורות במטריצה ריבועית חלקית בעלת דטרמיננטה שונה מאפס:
יהי s מספר השורות במטריצה החלקית המקסימלית בעלת דטרמיננטה שונה מאפס. נניח שדרגת השורות של A היא r. כלומר יש r שורות בת"ל במטריצה ולא יותר. לכן לפי (1) יש דטרמיננטה חלקית מסדר $r\times r$ ששונה מאפס. לכן $r\le s$. לפי (2) יש לפחות s שורות בת"ל ולכן $s\le r$. ומכאן ש- $r=s$. ☺

1.6. דטרמיננטות והעתקות לינאריות

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי ממימד n ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. תהי A המטריצה שמייצגת את T לפי בסיס כלשהו. נגדיר את **הדטרמיננטה של ההעתקה** ע"י $\det T = \det A$. לפי מסקנה קודמת הדטרמיננטה של ההעתקה מוגדרת היטב מאחר שאינה תלויה בבחירת הבסיס.

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל שדה F. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. אזי קיים סקלר יחיד $c_T\in F$ כך שלכל $\gamma_1,...,\gamma_n\in V$ מתקיים $c_T\Delta(\gamma_1,...,\gamma_n) = \Delta\left(T(\gamma_1),...,T(\gamma_n)\right)$ לכל $\Delta:V^n\to F$ פונקצית נפח שאינה פונקצית האפס.

<u>הוכחה</u>:

קיום: תהי T כמו למעלה ותהי Δ פונקצית נפח כלשהי. נגדיר פונקציה $\Delta_T:V^n\to F$ באופן הבא: $\Delta_T(\gamma_1,...,\gamma_n) = \Delta\left(T(\gamma_1),...,T(\gamma_n)\right)$. נראה ש- Δ_T פונקצית נפח:

1. יהיו $j\neq k$ כך ש- $\gamma_j=\gamma_k$. אזי $T(\gamma_j)=T(\gamma_k)$. מאחר ש- Δ פונקצית נפח נקבל ש- $\Delta_T(\gamma_1,...,\gamma_j,...,\gamma_k,...,\gamma_n) = \Delta\left(T(\gamma_1),...,T(\gamma_j),...,T(\gamma_k),...,T(\gamma_n)\right) = 0$.

2. יהי $\lambda\in F$ והי $1\le k\le n$ כלשהו. אזי מאחר ש- T העתקה לינארית ו- Δ פונקצית נפח נקבל

$$\begin{aligned}&\Delta_T(\gamma_1,...,\lambda\gamma_k,...,\gamma_n) = \Delta\left(T(\gamma_1),...,T(\lambda\gamma_k),...,T(\gamma_n)\right) = \\ &= \Delta\left(T(\gamma_1),...,\lambda T(\gamma_k),...,T(\gamma_n)\right) = \lambda\Delta\left(T(\gamma_1),...,T(\gamma_k),...,T(\gamma_n)\right) = \\ &= \lambda\Delta_T(\gamma_1,...,\gamma_k,...,\gamma_n)\end{aligned}$$

3. מאחר ש- T העתקה לינארית ו- Δ פונקצית נפח נקבל את התכונה השלישית של פונקציות נפח:

$$\Delta_T\left(\gamma_1,...,\gamma_k+\gamma_k',...,\gamma_n\right)=\Delta\left(T\left(\gamma_1\right),...,T\left(\gamma_k+\gamma_k'\right),...,T\left(\gamma_n\right)\right)=$$
$$=\Delta\left(T\left(\gamma_1\right),...,T\left(\gamma_k\right)+T\left(\gamma_k'\right),...,T\left(\gamma_n\right)\right)=$$
$$=\Delta\left(T\left(\gamma_1\right),...,T\left(\gamma_k\right),...,T\left(\gamma_n\right)\right)+\Delta\left(T\left(\gamma_1\right),...,T\left(\gamma_k'\right),...,T\left(\gamma_n\right)\right)=$$
$$=\Delta_T\left(\gamma_1,...,\gamma_k,...,\gamma_n\right)+\Delta_T\left(\gamma_1,...,\gamma_k',...,\gamma_n\right)$$

לכן Δ וגם Δ_T פונקציות נפח. לפי מסקנה קודמת מאחר ש- $\Delta\not\equiv 0$ קיים $c_T\in F$ כך ש- $\Delta_T=c_T\Delta$.
כלומר לכל $\gamma_1,...,\gamma_n\in V$ מתקיים $c_T\Delta\left(\gamma_1,...,\gamma_n\right)=\Delta\left(T\left(\gamma_1\right),...,T\left(\gamma_n\right)\right)$.

יחידות: נראה ש- c_T זה אינו תלוי ב- Δ. תהי T העתקה לינארית ויהיו Δ_1,Δ_2 פונקציות נפח השונות מפונקצית האפס. יהיו c_T,c_T' הסקלרים המתאימים ל- Δ_1,Δ_2 בהתאמה לפי החלק הראשון של ההוכחה. נראה ש- $c_T=c_T'$.
אם T היא טרנספורמצית האפס ברור ש- $c_T=c_T'=0$.
אם T אינה טרנספורמצית האפס נבחר בסיס $\gamma_1,...,\gamma_n$ ל- V. אזי לפי הגדרת c_T,c_T' נקבל ש-

$$c_T\Delta_1\left(\gamma_1,...,\gamma_n\right)=\Delta_1\left(T\left(\gamma_1\right),...,T\left(\gamma_n\right)\right)$$
$$c_T'\Delta_2\left(\gamma_1,...,\gamma_n\right)=\Delta_2\left(T\left(\gamma_1\right),...,T\left(\gamma_n\right)\right)$$

קיים סקלר $s\neq 0$ כך ש- $\Delta_2=s\Delta_1$ ולכן

$$\Delta_2\left(T\left(\gamma_1\right),...,T\left(\gamma_n\right)\right)=s\Delta_1\left(T\left(\gamma_1\right),...,T\left(\gamma_n\right)\right)=sc_T\Delta_1\left(\gamma_1,...,\gamma_n\right)$$

מצד שני $\Delta_2\left(T\left(\gamma_1\right),...,T\left(\gamma_n\right)\right)=c_T'\Delta_2\left(\gamma_1,...,\gamma_n\right)$. נזכור ש- $\Delta_2=s\Delta_1$ ונקבל לכן ש- $sc_T\Delta_1\left(\gamma_1,...,\gamma_n\right)=sc_T'\Delta_1\left(\gamma_1,...,\gamma_n\right)$. ולכן $c_T=c_T'$. ☺

<u>משפט</u>: יהיו V מרחב וקטורי n מימדי עם בסיס $\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$ ו- Δ פונקצית נפח על V. יהיו $\beta_1,...,\beta_n\in V$. תהי A מטריצת המקדמים של $\beta_1,...,\beta_n$ לפי $\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$. אזי $\Delta\left(\beta_1,...,\beta_n\right)=|A|\Delta\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$.

<u>הוכחה</u>: אם $\beta_1,...,\beta_n$ תלויים לינארית אזי $\Delta\left(\beta_1,...,\beta_n\right)=0$. אבל מצד שני גם עמודות A תלויות לינארית ולכן $|A|=0$ ולכן $\Delta\left(\beta_1,...,\beta_n\right)=0=|A|\Delta\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$.
אם $\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)=\left(\beta_1,...,\beta_n\right)$ אז $A=I$ ולכן $|A|=1$ ו- $\Delta\left(\beta_1,...,\beta_n\right)=\Delta\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)=|A|\Delta\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$.
אם $\beta_1,...,\beta_n$ בת"ל ניתן לקבל את $\left(\beta_1,...,\beta_n\right)$ מ- $\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$ ע"י k פעולות אלמנטריות. אותן הפעולות נעשות על מטריצת המקדמים. נניח שהפעולות והמטריצות המתאימות היו:

$$\begin{array}{cc}
\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right) & I \\
\left(\alpha_1^{(1)},...,\alpha_n^{(1)}\right) & I^{(1)} \\
\left(\alpha_1^{(2)},...,\alpha_n^{(2)}\right) & I^{(2)} \\
\vdots & \\
\left(\beta_1,...,\beta_n\right) & A
\end{array}$$

הפעולה ה- i משפיעה באותו אופן הן על $\Delta\left(\alpha_1^{(i)},...,\alpha_n^{(i)}\right)$ והן על $\left|I^{(i)}\right|$. לכן:

$$\begin{array}{cc}
\Delta\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right) & |I|\Delta\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right) \\
\Delta\left(\alpha_1^{(1)},...,\alpha_n^{(1)}\right) & \left|I^{(1)}\right|\Delta\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right) \\
\Delta\left(\alpha_1^{(2)},...,\alpha_n^{(2)}\right) & \left|I^{(2)}\right|\Delta\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right) \\
\vdots & \\
\Delta\left(\beta_1,...,\beta_n\right) & |A|\Delta\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)
\end{array}$$

וזה מה שרצינו. ☺

<u>מסקנה</u>: תהי Δ פונקצית נפח על מרחב וקטורי V מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ו-$(\alpha_1,...,\alpha_n)$ בסיס של V ו-A המטריצה של T לפי הבסיס הזה. אזי
$\Delta\left(T(\alpha_1),...,T(\alpha_n)\right)=|A|\Delta(\alpha_1,...,\alpha_n)$.

<u>הוכחה</u>: לכל $1\le i\le n$ נגדיר $\beta_i=T(\alpha_i)$. המטריצה של T לפי הבסיס $(\beta_1,...,\beta_n)$ היא בדיוק מטריצת המקדמים של $(\beta_1,...,\beta_n)$. לכן לפי הטענה הקודמת נקבל את הדרוש. ☺

מכאן אפשר להוכיח את משפט המכפלה בצורה אחרת.

<u>משפט המכפלה</u>: לכל $A,B\in M_n(F)$ מתקיים $\det AB=\det A\det B$.
<u>הוכחה</u>: תהי Δ פונקצית נפח על V שאינה פונקצית האפס. נניח ש-A מייצגת את T בבסיס מסוים ו-B מייצגת את S באותו בסיס. יהי $(v_1,...,v_n)$ בסיס של V. אזי גם $\left(S(v_1),...,S(v_n)\right)$ בסיס של V. לכן לפי המסקנה הקודמת:

$$|TS|\Delta(v_1,...,v_n)=\Delta\left((TS)(v_1),...,(TS)(v_n)\right)=|T|\Delta\left(S(v_1),...,S(v_n)\right)=|T||S|\Delta(v_1,...,v_n)$$

מאחר ש-Δ אינה פונקצית האפס מתקבל ש-$|TS|=|T||S|$, כלומר $\det AB=\det A\det B$. ☺

2. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

2.1. תכונות בסיסיות של ערכים עצמיים

<u>הגדרה</u>: תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית על מרחב וקטורי V. יהיו $0\neq\alpha\in V$ ו- $c\in F$ כך ש- $T\alpha=c\alpha$. אז c נקרא **ערך עצמי** של T ו- α נקרא **וקטור עצמי** של T השייך ל- c.

<u>הגדרה</u>: תהי $A\in M_n(F)$. יהיו $0\neq\alpha\in F^n$ ו- $c\in F$ כך ש- $A\alpha=c\alpha$. אז c נקרא **ערך עצמי** של A ו- α נקרא **וקטור עצמי** של A השייך ל- c.

<u>טענה</u>: $A\in M_n(F)$ הפיכה אמ"מ 0 אינו ערך עצמי שלה.

<u>הוכחה</u>: ידוע ש- A הפיכה אמ"מ $\ker A=\{0\}$, כלומר אמ"מ לא קיים $\alpha\neq 0$ כך ש- $A\alpha=0=0\cdot\alpha$.
וזה נכון אמ"מ 0 אינו ערך עצמי של A. ☺

<u>טענה</u>: תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית על מרחב V ממימד n ויהי $\alpha_1,...,\alpha_n$ בסיס של V. תהי A המטריצה המייצגת את T לפי בסיס זה. אזי c ערך עצמי של T אמ"מ c ערך עצמי של A.
<u>הוכחה</u>: יהי $[\alpha]$ וקטור המקדמים של α לפי הבסיס הנתון. לפי ההגדרה של מטריצה של העתקה ידוע ש- $T\alpha=c\alpha$ אמ"מ $A[\alpha]=c[\alpha]$. מכאן הטענה. ☺

<u>מסקנה</u>: תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ויהיו $\mathfrak{B},\mathfrak{B}'$ בסיסים של V. יהיו A,A' המטריצות של T לפי $\mathfrak{B},\mathfrak{B}'$ בהתאמה. אזי ל- A ול- A' אותם ערכים עצמיים.

<u>דוגמה</u>: אם לשתי מטריצות יש אותם ערכים עצמיים, אין הדבר אומר שהן דומות. למשל, קל לראות שהערך העצמי היחיד של $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ושל $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ הוא 1. אבל כמובן המטריצות אינן דומות.

<u>משפט</u>: יהיו $c_1,...,c_k$ ערכים עצמיים שונים של העתקה לינארית $T:V\to V$ ויהיו $\gamma_1,...,\gamma_k$ וקטורים עצמיים של T השייכים ל- $c_1,...,c_k$ בהתאמה. אזי $\gamma_1,...,\gamma_k$ בלתי תלויים לינארית.
<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על k.
אם $k=1$ אזי לפי ההגדרה $\gamma_1\neq 0$ ולכן הוא בלתי תלוי. נניח שהמשפט נכון עבור k ונוכיח עבור $k+1$.

יהיו $c_1,...,c_{k+1}$ ערכים עצמיים שונים של T. נניח שקיימים $a_1,...,a_{k+1}\in F$ כך ש- $\sum_{i=1}^{k+1}a_i\gamma_i=0$ *

ונראה ש- $a_1=...=a_{k+1}=0$. נפעיל את T על (*) ונקבל $T\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i\gamma_i\right)=\sum_{i=1}^{k+1}a_iT\gamma_i=\sum_{i=1}^{k+1}a_ic_i\gamma_i=0$ **. נכפול את (*) ב- c_{k+1} ונקבל ש- $\sum_{i=1}^{k+1}a_ic_{k+1}\gamma_i=0$ ***. נחסר כעת את (***) מ-(**) ונקבל ש-

$\sum_{i=1}^{k}a_i\left(c_i-c_{k+1}\right)\gamma_i=0$. לפי הנחת האינדוקציה לכל $1\leq i\leq k$ מתקיים $a_i\left(c_i-c_{k+1}\right)=0$. אבל כל $\{c_i\}$ שונים ולכן $c_i-c_{k+1}\neq 0$. מכאן ש- $a_1=...=a_k=0$. נציב זאת ב-(*) ונקבל $c_{k+1}\gamma_{k+1}=0$. אבל $\gamma_{k+1}\neq 0$ ולכן $c_{k+1}=0$. כלומר $\gamma_1,...,\gamma_{k+1}$ בלתי תלויים לינארית.
לפי עיקרון האינדוקציה המשפט נכון לכל $k\in\mathbb{N}$. ☺

<u>מסקנה</u>: להעתקה לינארית $T:V\to V$ על מרחב ממימד n יש לכל היותר n ערכים עצמיים שונים, ולמטריצה $A\in M_n(F)$ יש לכל היותר n ערכים עצמיים שונים.

<u>הגדרה</u>: נאמר שהעתקה לינארית $T:V\to V$ **לכסינה** אם קיים בסיס של V שלפיו המטריצה של T אלכסונית. נאמר ש- $A\in M_n(F)$ **לכסינה** אם היא דומה למטריצה אלכסונית, כלומר אם היא מייצגת העתקה לינארית לכסינה או אם קיימת $P\in M_n(F)$ רגולרית כך ש- $P^{-1}AP$ אלכסונית.

<u>משפט</u>: תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. T לכסינה אמ"מ קיים בסיס של V שמורכב כולו מווקטורים עצמיים של T במקרה זה איברי האלכסון במטריצה האלכסונית הם הערכים העצמיים של T.
<u>הוכחה</u>:
($\Leftarrow$) נניח ש- T לכסינה. אזי קיים בסיס של V $\mathfrak{A}=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ כך שהמטריצה של T לפי בסיס זה היא אלכסונית:

$$[T]_{\mathfrak{A}}=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

אז לכל $1\le i\le n$ יתקיים

$$[T]_{\mathfrak{A}}e_i=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i\cdot 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=a_ie_i$$

אבל $[\alpha_i]_{\mathfrak{A}}=e_i$. ולכן α_i וקטור עצמי של T.
($\Rightarrow$) נניח שקיים בסיס $\mathfrak{A}=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ של וקטורים עצמיים. כלומר לכל $1\le i\le n$ מתקיים $T\alpha_i=c_i\alpha_i$ כאשר $c_i\in F$. אזי לפי ההגדרה של מטריצה של העתקה נקבל ש-

$$[T]_{\mathfrak{A}}=\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}$$

כלומר T לכסינה. ☺

<u>מסקנה</u>: תהי העתקה לינארית $T:V\to V$ על מרחב ממימד n. אם קיימים ל- T n ערכים עצמיים שונים אזי T לכסינה.
<u>הוכחה</u>: לפי משפט קודם עבור n ערכים עצמיים שונים קיימים n וקטורים עצמיים שהם קבוצה בלתי תלויה לינארית. אבל המרחב הוא ממימד n ולכן קבוצה זו היא בסיס של וקטורים עצמיים. ולכן T לכסינה. ☺

<u>דוגמה</u>: התנאי האחרון הוא מספיק אך לא הכרחי. למשל למטריצת היחידה $I_{100}\in M_{100}(F)$ יש ערך עצמי אחד ויחיד (ולא 100) והוא 1 אבל היא כמובן לכסינה שהרי היא אלכסונית בעצמה.

2.2. הפולינום האופייני

<u>משפט</u>: תהי $A\in M_n(F)$. c ערך עצמי של A אמ"מ $\det(cI-A)=0$.
<u>הוכחה</u>: c ערך עצמי של A $\Leftrightarrow$ קיים $\alpha\neq 0$ כך ש- $A\alpha=c\alpha$ $\Leftrightarrow$ $(cI-A)\alpha=c\alpha-A\alpha=0$ $\Leftrightarrow$ $\ker(cI-A)\neq\{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\det(cI-A)=0$. ☺

<u>הגדרה</u>: תהי $A \in M_n(F)$. **הפולינום האופייני** של A הוא $p_A(x) = \det(xI - A)$.

<u>מסקנה</u>: תהי $A \in M_n(F)$. הערכים העצמיים של A הם השורשים של הפולינום האופייני $p_A(x)$.

<u>טענה</u>: יהי $p_A(x)$ הפולינום האופייני של $A \in M_n(F)$. אזי $p_A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ כאשר $a_0 = (-1)^n \det A$, $a_{n-1} = -\operatorname{tr} A$ ו- $a_n = 1$.

<u>טענה</u>: יהיו $A, B \in M_n(F)$ מטריצות דומות. אזי $p_A(x) = p_B(x)$.

<u>הוכחה</u>: קיימת $P \in M_n(F)$ רגולרית כך ש- $B = P^{-1}AP$. אזי $p_B(x) = \det(xI - B) = \det(xI - P^{-1}AP)$. הביטוי xI מתחלף עם כל מטריצה ולכן $\det(xI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}xIP - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P)$. כעת לפי משפט המכפלה[4] $\det(P^{-1}(xI - A)P) = (\det P)^{-1} \cdot \det(xI - A) \cdot \det P = \det(xI - A) = p_A(x)$. כלומר $p_A(x) = p_B(x)$. ☺

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. **הפולינום האופייני** של T הוא הפולינום האופייני של אחת המטריצות המייצגות אותה לפי בסיס כלשהן. לפי הטענה הקודמת, הפולינום האופייני של העתקה מוגדר היטב.

<u>משפט קיילי-המילטון למטריצות</u>: תהי $A \in M_n(F)$. אזי $p_A(A) = \tilde{0}$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש- $p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. ידוע ש-

$$(xI - A)\operatorname{Adj}(xI - A) = \det(xI - A) \cdot I = p_A(x) I = (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) I \quad *$$

במטריצה $\operatorname{Adj}(xI - A)$ מופיעים מינורים של $xI - A$ מסדר $(n-1) \times (n-1)$. לכן כל איברי $\operatorname{Adj}(xI - A)$ הם פולינומים ממעלה לכל היותר $n-1$. כל מטריצה שאיבריה פולינומים ממעלה לכל היותר k ניתנת לכתיבה כ- $B_0 + B_1 x + \ldots + B_k x^k$ כאשר $B_1, \ldots, B_k$ מטריצות[5]. לכן נניח ש- $\operatorname{Adj}(xI - A) = B_0 + B_1 x + \ldots + B_{n-1}x^{n-1}$. נציב זאת ב-(*) ונקבל

$$-AB_0 + (B_0 - AB_1)x + \ldots + (B_{n-2} - AB_{n-1})x^{n-1} + B_{n-1}x^n =$$
$$= xB_0 + xB_1 x + \ldots + xB_{n-1}x^{n-1} - (AB_0 + AB_1 x + \ldots + AB_{n-1}x^{n-1}) = (xI - A)(B_0 + B_1 x + \ldots + B_{n-1}x^{n-1}) =$$
$$= Ix^n + a_{n-1}Ix^{n-1} + \ldots + a_1 Ix + a_0 I$$

כעת נשווה מקדמים ונקבל ש-

$$\begin{aligned} -AB_0 &= a_0 I \\ B_0 - AB_1 &= a_1 I \\ &\vdots \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= a_{n-1} I \\ B_{n-1} &= I \end{aligned}$$

כעת נכפול את השורה ה- i ב- A^{i-1} ונקבל

---

[4] יש כאן בעייתיות מסוימת משום שלא הוכחנו את משפט המכפלה עבור מטריצות מעל חוגים. גם לא נוכיח. רק נאמין לשמואל שהוא נכון...

[5] למשל, $\begin{pmatrix} x^3 + x + 2 & x^2 + 3 \\ 3x^2 + 4x & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^3$

$$\begin{aligned} -AB_0 &= a_0 I \\ B_0 A - A^2 B_1 &= a_1 A \\ &\vdots \\ B_{n-2}A^{n-2} - A^{n-1}B_{n-1} &= a_{n-1}A^{n-1} \\ B_{n-1}A^{n-1} &= A^n \end{aligned}$$

נחשב את כל השורות ונקבל ש- $\tilde{0} = a_0 I + a_1 A + ... + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = p_A(A)$. ☺

<u>משפט קיילי-המילטון להעתקות</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V \to V$ העתקה לינארית ויהי $p_T(x)$ הפולינום האופייני שלה. אזי $p_T(T) = 0$.

<u>הוכחה</u>: תהי A המטריצה שמייצגת את T לפי בסיס כלשהו $\mathfrak{A}$. ידוע ש- $p_A(x) = p_T(x)$. לפי משפט קיילי-המילטון למטריצות מתקיים $p_T(A) = p_A(A) = 0$. אבל בגלל האיזומורפיזם בין מטריצות להעתקות המטריצה $p_T(A)$ מייצגת את $p_T(A)$ לפי אותו בסיס $\mathfrak{A}$. אבל זוהי מטריצת האפס ולכן $p_T(T) = 0$. ☺

<u>טענה</u>: יהיו $A, B \in M_n(F)$ דומות. אזי $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$

<u>הוכחה א'</u>: ידוע שלמטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני וכן ידוע שאם $p_A(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ אז $a_{n-1} = -\operatorname{tr} A$. ולכן $-\operatorname{tr} B = a_{n-1} = -\operatorname{tr} A$. ☺

<u>הוכחה ב'</u>: ידוע ש- $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$. אם $B = P^{-1}AP$ אז $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} P^{-1}AP = \operatorname{tr} P^{-1}PA = \operatorname{tr} A$. ☺

<u>דוגמה</u>: אם לשתי מטריצות יש אותה עקבה, אין הדבר אומר כי הן דומות. הדוגמה לכך היא כרגיל המטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>טענה</u>: תהי $A \in M_n(F)$ לכסינה. אזי הפולינום האופייני שלה פריק לגמרי לגורמים לינאריים.

<u>הוכחה</u>: אם A לכסינה קיימת $P \in M_n(F)$ רגולרית כך ש- $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = B$. יודע ש- $p_A(x) = p_B(x)$. אבל ברור ש- $p_B(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$. ☺

<u>דוגמה</u>: תנאי זה הכרחי אך לא מספיק. נסתכל על המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. מתקיים $p_A(x) = (x-1)^2$ אבל המטריצה לא לכסינה. נראה שלא קיים בסיס של וקטורים עצמיים של A ל- F^2. הערך העצמי היחיד של A הוא 1. נחפש וקטורים $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ כך ש- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. כלומר $\begin{cases} x + y = x \\ y = y \end{cases}$. מכאן שהוקטורים שמקיימים זאת הם $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. אבל $\dim \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = 1$ ולכן לא יכול להיות בסיס של וקטורים עצמיים.

2.3. הפולינום המינימלי

<u>הגדרה</u>: **פולינום מינימלי** של $A \in M_n(F)$ הוא פולינום מתוקן $m_A(x)$ כך ש- $m_A(A) = 0$ ומעלתו מינימלית מכל הפולינומים שמקיימים זאת.

<u>טענה</u>: לכל מטריצה קיים פולינום מינימלי.

<u>הוכחה</u>: תהי $A\in M_n(F)$. לפי משפט קיילי-המילטון מתקיים $p_A(A)=0$. לכן הקבוצה $\{\deg f(x): f(x) \text{ is normed} \wedge f(A)=0\}\subset\mathbb{N}$ אינה ריקה. לכן קיים לה מינימום k. לכן קיים פולינום מתוקן ממעלה k אשר מתאפס ע"י A ולא קיימים פולינומים ממעלה נמוכה יותר שמקיימים זאת. לכן זהו פולינום מינימלי. ☺

<u>משפט</u>: תהי $A\in M_n(F)$. הפולינום המינימלי של A הוא יחיד.

<u>הוכחה</u>: יהיו $m_1(x),m_2(x)$ פולינומים מינימליים של A אשר לא זהים. ממשפט קיילי-המילטון ברור ש- $\deg m_1(x),\deg m_2(x)\le n$. מאחר ששניהם מתוקנים מתקיים $0<\deg\left(m_1(x)-m_2(x)\right)<\deg m_1(x)$. נניח ש- c הוא המקדם המוביל של $m_1(x)-m_2(x)$. אזי $c^{-1}\left(m_1(x)-m_2(x)\right)$ פולינום מתוקן שמעלתו קטנה מ- $\deg m_1(x)$. כמובן מתקיים $c^{-1}\left(m_1(A)-m_2(A)\right)=0$. אבל זאת סתירה למינימליות של מעלת $m_1(x)$. לכן $m_1(x)=m_2(x)$. ☺

<u>משפט</u>: תהי $A\in M_n(F)$ ויהי $f(x)$ פולינום כך ש- $f(A)=0$. אזי $m_A(x)\,|\,f(x)$.

<u>הוכחה</u>: נבצע חילוק עם שארית של פולינומים. נניח ש- $f(x)=q(x)m_A(x)+r(x)$ * כאשר $\deg r(x)<\deg m_A(x)$. נציב את A ב-(*)[6] ונקבל ש- $0=f(A)=q(A)m_A(A)+r(A)=r(A)$. אם $r(x)\not\equiv 0$ יהי c המקדם המוביל של $r(x)$. אזי $c^{-1}r(x)$ פולינום שמתאפס ע"י A ומעלתו קטנה ממעלת $m_A(x)$. וזו סתירה. לכן $r(x)\equiv 0$. ☺

<u>טענה</u>: כל הערכים העצמיים של $A\in M_n(F)$ הם שורשים של הפולינום המינימלי.

<u>הוכחה</u>: יש להראות שאם a ערך עצמי של A אז $(x-a)\,|\,m_A(x)$. נבצע חילוק עם שארית. נניח ש- $m_A(x)=q(x)(x-a)+r(x)$ * כאשר $\deg r(x)<\deg(x-a)=1$. לכן $r(x)\equiv r\in F$. נציב כעת את A ב-(*) ונקבל ש- $(A-aI)q(A)=rI$. מכאן ש- $\det(A-aI)\cdot\det(q(A))=\det((A-aI)q(A))=\det(rI)=r^n$. אבל a ערך עצמי של A ולכן $\det(A-aI)=0$. ולכן $r^n=0$ ומכאן ש- $r=0$. ☺

<u>מסקנה</u>: תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה בעלת n ערכים עצמיים שונים $a_1,...,a_n$. אזי

$$m_A(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)=p_A(x).$$

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. **פולינום מינימלי** של T הוא פולינום מתוקן $m_T(x)$ כך ש- $m_T(T)=0$ ומעלתו מינימלית מכל הפולינומים שמקיימים זאת.

<u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. אזי ל- T פולינום מינימלי.

<u>הוכחה</u>: לפי משפט קיילי-המילטון מתקיים $p_T(T)=0$. לכן הקבוצה $\{\deg f(x): f(x) \text{ is normed} \wedge f(T)=0\}\subset\mathbb{N}$ אינה ריקה. לכן קיים לה מינימום k. לכן קיים פולינום מתוקן ממעלה k אשר מתאפס ע"י T ולא קיימים פולינומים ממעלה נמוכה יותר שמקיימים זאת. לכן זהו פולינום מינימלי. ☺

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. הפולינום המינימלי של T הוא יחיד.

---

[6] זה אפשרי משום שחזקות של A מתחלפות ומתקבצות בינן לבין עצמן.

<u>הוכחה</u>: יהיו $m_1(x),m_2(x)$ פולינומים מינימליים של T אשר לא זהים. ממשפט קיילי-המילטון ברור ש- $\deg m_1(x),\deg m_2(x)\le n$. מאחר ששניהם מתוקנים מתקיים $0<\deg\left(m_1(x)-m_2(x)\right)<\deg m_1(x)$. נניח ש- c הוא המקדם המוביל של $m_1(x)-m_2(x)$. אזי $c^{-1}\left(m_1(x)-m_2(x)\right)$ פולינום מתוקן שמעלתו קטנה מ- $\deg m_1(x)$. כמובן מתקיים $c^{-1}\left(m_1(T)-m_2(T)\right)=0$. אבל זאת סתירה למינימליות של מעלת $m_1(x)$. לכן $m_1(x)=m_2(x)$. ☺

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית יהי $f(x)$ פולינום כך ש- $f(T)=0$. אזי $m_T(x)\,|\,f(x)$.

<u>הוכחה</u>: נבצע חילוק עם שארית של פולינומים. נניח ש- $f(x)=q(x)m_T(x)+r(x)$ * כאשר $\deg r(x)<\deg m_A(x)$. נציב את T ב-(*) ונקבל ש- $0=f(T)=q(T)m_T(T)+r(T)=r(T)$. אם $r(x)\not\equiv 0$ יהי c המקדם המוביל של $r(x)$. אזי $c^{-1}r(x)$ פולינום שמתאפס ע"י T ומעלתו קטנה ממעלת $m_T(x)$. וזו סתירה. לכן $r(x)\equiv 0$. ☺

<u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ותהי $A\in M_n(F)$ מטריצה שמייצגת אותה לפי בסיס כלשהו. אזי $m_A(x)=m_T(x)$.

<u>הוכחה</u>: ברור שאם $m_T(T)=0$ אז $m_T(A)=0$ הפולינום המינימלי של מטריצה מחלק כל פולינום אחר שמתאפס על ידה. לכן $m_A(x)\,|\,m_T(x)$. באותו אופן מאחר ש- $m_A(A)=0$ נובע ש- $m_A(T)=0$ ואז $m_T(x)\,|\,m_A(x)$. קיבלנו ש- $m_A(x),m_T(x)$ פולינומים מתוקנים שמחלקים זה את זה. לכן $m_A(x)=m_T(x)$.[7] ☺

<u>מסקנה</u>: יהיו $A,B\in M_n(F)$ דומות. אזי $m_A(x)=m_B(x)$.

<u>דוגמה</u>: אם לשתי מטריצות יש אותו פולינום מינימלי אין הדבר מצביע על כך שהן דומות.

2.4. מרחבים עצמיים

בכל הסעיף הבא נדון בהעתקות לינאריות, אך את כל ההגדרות וכל המשפטים ניתן לנסח באופן אנלוגי עבור מטריצות $M_n(F)$.

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ויהי a ערך עצמי שלה. נגדיר את **המרחב העצמי** של a ע"י $V_a=\{\alpha\in V:T\alpha=a\alpha\}$.

<u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ויהי a ערך עצמי שלה. אזי V_a תת מרחב של V.

<u>הוכחה</u>: יש להראות ש- $V_a\neq\emptyset$ ושהיא סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר[8]. ברור ש- $V_a\neq\emptyset$ כי $0\in V_a$. יהיו $\alpha,\beta\in V_a$ אזי $T(\alpha+\beta)=T\alpha+T\beta=a\alpha+a\beta=a(\alpha+\beta)$. לכן $\alpha+\beta\in V_a$. יהי $c\in F$. אזי $T(c\alpha)=cT\alpha=c(a\alpha)=a(c\alpha)$. כלומר $c\alpha\in V_a$. לכן V_a תת מרחב. ☺

---

7 <u>טענה</u>: יהיו $f(x),g(x)\in F[x]$ מתוקנים כך ש- $f(x)\,|\,g(x)$ וגם $g(x)\,|\,f(x)$. אזי $f(x)=g(x)$.
ראה הוכחה בנספח ב.

8 <u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תהי $U\subset V$ תת קבוצה. U תת מרחב אמ"מ מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

<u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ויהי a ערך עצמי שלה. אזי $1\le \dim V_a \le n$.
<u>הוכחה</u>: קיים וקטור עצמי $0\ne \alpha \in V_a$ ולכן $1\le \dim V_a$. מצד שני, זהו תת מרחב של מרחב ממימד n ולכן $\dim V_a \le n$. ☺

<u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ויהיו $a_1,\dots,a_k$ ערכים עצמיים שונים של T. אזי לכל $1\le j\le k$ מתקיים $V_{a_j}\cap\sum_{i\ne j}V_{a_i}=\{0\}$.
<u>הוכחה</u>: יהי $\{0\} = V_{a_j}\cap\sum_{i\ne j}V_{a_i} \ni \alpha_j \ne 0$. אזי $\alpha_j\in V_{a_j}$ וגם $\alpha_j\in\sum_{i\ne j}V_{a_i}$. לכן לכל $i\ne j$ קיים $\alpha_i\in V_{a_i}$ כך ש- $\alpha_j=\sum_{i\ne j}\alpha_i$. $\alpha_j\ne 0$ ולכן לא יכול להיות שכל ה- α_i הם וקטורי האפס. אז קיבלנו קבוצה תלויה לינארית של וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים. אבל זאת סתירה. לכן $\alpha_j=0$. ☺

<u>מסקנה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ויהיו $a_1,\dots,a_k$ ערכים עצמיים שונים של T. אזי לכל $1\le i\ne j\le k$ מתקיים $V_{a_i}\cap V_{a_j}=\{0\}$.

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ויהיו $V_1,\dots,V_k$ תת מרחבים. הסכום $U=\sum_{i=1}^{k}V_i$ ייקרא **סכום ישר** ויסומן $U=\bigoplus_{i=1}^{k}V_i$ אם לכל $\alpha\in\sum_{i=1}^{k}V_i$ קיימת הצגה יחידה כ- $\alpha=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$ כאשר לכל $1\le i\le k$ $\alpha_i\in V_i$.

<u>הערה</u>: ברור שאם $U=\bigoplus_{i=1}^{k}V_i$ אז גם סכום של כל תת קבוצה של $\{V_i\}_{i=1}^{k}$ עם סכום של כל תת קבוצה אחרת הוא סכום ישר.

<u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ויהיו $V_1,\dots,V_k$ תת מרחבים. $U=\bigoplus_{i=1}^{k}V_i$ אמ"מ לכל $1\le j\le k$ מתקיים $V_j\cap\sum_{i\ne j}V_i=\{0\}$.
<u>הוכחה</u>:
($\Leftarrow$) $U=\bigoplus_{i=1}^{k}V_i$ ויהי $\alpha_j\in V_j\cap\sum_{i\ne j}V_i$. אזי $-\alpha_j,\alpha_j\in V_j$ וכן קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\dots,\alpha_k$ כך ש- $\alpha_j=\sum_{i\ne j}\alpha_i$. כעת $0=-\alpha_j+\alpha_j\in V_j\oplus\sum_{i\ne j}V_i$. אבל גם $0=-0+0\in V_j\oplus\sum_{i\ne j}V_i$. והרי ההצגה היא יחידה. לכן $\alpha_j=0$.
($\Rightarrow$) נניח שלכל $1\le j\le k$ מתקיים $V_j\cap\sum_{i\ne j}V_i=\{0\}$ ונראה שלכל $\alpha\in\sum_{i=1}^{k}V_i$ קיימת הצגה יחידה כ- $\alpha=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$ כאשר לכל $1\le i\le k$ $\alpha_i\in V_i$. נניח שיש שתי הצגות $\sum_{i=1}^{k}\beta_i=\alpha=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$. אזי $\alpha_1-\beta_1=\sum_{i=2}^{k}\beta_i-\sum_{i=2}^{k}\alpha_i$. אבל $\sum_{i=2}^{k}\beta_i-\sum_{i=2}^{k}\alpha_i\in\sum_{i=2}^{k}V_i$ ו- $\alpha_1-\beta_1\in V_1$. ולכן $\alpha_1-\beta_1=0$ כלומר $\alpha_1=\beta_1$.

---

1. U לא ריקה
2. U סגורה תחת חיבור של וקטורים
3. U סגורה תחת כפל בסקלר.

ראה גם נספח א.

כעת אפשר להראות באינדוקציה שלכל $1\le i\le k$ מתקיים $\alpha_i=\beta_i$, כלומר ההצגה היא יחידה ולכן $U=\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}V_i$. ☺

<u>מסקנה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ויהיו $V_1,\dots,V_k$ תת מרחבים כך ש- $U=\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}V_i$. אזי לכל $1\le i\ne j\le k$ מתקיים $V_i\cap V_j=\{0\}$.

<u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n ויהיו $V_1,\dots,V_k$ תת מרחבים כך ש- $U=\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}V_i$. אזי $\dim U=\sum_{i=1}^{k}\dim V_i$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה שלמה על k.
עבור $k=2$ לפי משפט מהסמסטר הקודם מתקיים $\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$.
אבל $V_1\cap V_2=\{0\}$ ולכן $\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.
נניח שהטענה נכונה עבור k נוכיח ל-$k+1$. יהי $U=\overset{k+1}{\underset{i=1}{\oplus}}V_i=\left(\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}V_i\right)\oplus V_{k+1}$. אז
$$\dim U=\dim\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}V_i+\dim V_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\dim V_i+\dim V_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}\dim V_i.$$
לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $k\in\mathbb{N}$. ☺

<u>מסקנה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ויהיו $a_1,\dots,a_k$ ערכים עצמיים שונים של T. אזי $\sum_{i=1}^{k}V_{a_i}=\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}V_{a_i}$.

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n ויהיו $V_1,\dots,V_k$ תת מרחבים כך ש- $U=\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}V_i$. יהיו $\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_k$ בסיסים ל- $V_1,\dots,V_k$ בהתאמה. אזי $\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{A}_i$ בסיס ל- U.

<u>הוכחה</u>: ברור שהקבוצות זרות ולכן $\left|\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{A}_i\right|=\sum_{i=1}^{k}|\mathfrak{A}_i|$. אבל $\dim U=\sum_{i=1}^{k}|\mathfrak{A}_i|$. אם נראה ש- $\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{A}_i$ פורש את U נקבל את הטענה. אבל זה ברור כי אם $\alpha=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\in\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}V_i$ ולכל $1\le i\le k$ מתקיים $\alpha_i=\sum_{j=1}^{n_i}a_j^i\alpha_j^i$ כאשר $n_i=\dim V_i$ ו- $\alpha_j^i\in\mathfrak{A}_i$ לכל $1\le j\le n_i$ אז $\alpha\in\operatorname{span}\left(\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{A}_i\right)$. ☺

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ויהיו $a_1,\dots,a_k$ כל הערכים העצמיים השונים שלה. אזי T לכסינה אמ"מ $\dim\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}V_{a_i}=n$.

<u>הוכחה</u>:
($\Leftarrow$) נניח ש- T לכסינה. יהיו $V_1,\dots,V_k$ כל המרחבים העצמיים שלה. קיים בסיס של V שהוא כולו וקטורים עצמיים של T $\mathfrak{A}=\left\{\alpha_1^1,\dots,\alpha_{n_1}^1,\dots,\alpha_1^k,\dots,\alpha_{n_k}^k\right\}$. נניח בה"כ שלכל $1\le i\le k$ $\alpha_1^i,\dots,\alpha_{n_i}^i\in V_i$.
נראה ש- $\alpha_1^i,\dots,\alpha_{n_i}^i$ מהווים בסיס ל- V_{a_i}. ברור שהם בת"ל ולכן יש רק להראות שהם פורשים את V_{a_i}. נראה זאת רק עבור V_{a_1}. ברור שאותה ההוכחה תעבוד לכל $1\le i\le k$. יהי $\beta\in V_{a_1}$. נניח ש- $\beta=d_1^1\alpha_1^1+\dots+d_{n_1}^1\alpha_{n_1}^1+\dots+d_1^k\alpha_1^k+\dots+d_{n_k}^k\alpha_{n_k}^k$. אזי
$\beta-d_1^1\alpha_1^1+\dots+d_{n_1}^1\alpha_{n_1}^1=d_1^2\alpha_1^2+\dots+d_{n_2}^2\alpha_{n_2}^2+\dots+d_1^k\alpha_1^k+\dots+d_{n_k}^k\alpha_{n_k}^k$. אבל $\beta-d_1^1\alpha_1^1+\dots+d_{n_1}^1\alpha_{n_1}^1\in V_{a_1}$ ו- $d_1^2\alpha_1^2+\dots+d_{n_2}^2\alpha_{n_2}^2+\dots+d_1^k\alpha_1^k+\dots+d_{n_k}^k\alpha_{n_k}^k\in\sum_{i=2}^{k}V_{a_i}$. לפי טענה קודמת $V_{a_1}\cap\sum_{i\ne1}V_{a_i}=\{0\}$ ולכן

$\beta - d_1^1\alpha_1^1 + \ldots + d_{n_1}^1\alpha_{n_1}^1 = 0$ כלומר $\beta = d_1^1\alpha_1^1 + \ldots + d_{n_1}^1\alpha_{n_1}^1$ ולכן $\beta \in \operatorname{span}\left\{\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{n_1}^1\right\}$. לכן $\dim \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} V_{a_i} = \sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

($\Rightarrow$) נניח ש- $\dim \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} V_{a_i} = n$. לכל $1 \le i \le k$ ניקח בסיס $\mathfrak{A}_i$ ל- V_{a_i}. לפי המשפט הקודם $\bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{A}_i$ בסיס ל- $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} V_{a_i}$. אבל $\dim \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} V_{a_i} = n$ ולכן $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} V_{a_i} = V$. כלומר מצאנו בסיס של וקטורים עצמיים ל- V. מכאן ש- T לכסינה. ☺

<u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית ויהיו $a_1, \ldots, a_k$ כל הערכים העצמיים השונים שלה. אזי T לכסינה אמ"מ $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} V_{a_i} = V$.

<u>הוכחה</u>: T לכסינה אמ"מ $\dim \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} V_{a_i} = n$. אבל מאחר ש- $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} V_{a_i}$ תת מרחב של V זה נכון אמ"מ $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} V_{a_i} = V$. ☺

2.5. ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. יהי $a \in F$ ערך עצמי של T. **הריבוי האלגברי** של a שנסמנו $\operatorname{Alg} a$ הוא הריבוי שלו כשורש של הפולינום האופייני של T.

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. יהי $a \in F$ ערך עצמי של T. **הריבוי הגיאומטרי** של a שנסמנו $\operatorname{Geo} a$ הוא $\operatorname{Geo} a = \dim V_a$.

<u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. יהי $a \in F$ ערך עצמי של T. אזי $1 \le \operatorname{Geo} a \le \operatorname{Alg} a$.

<u>הוכחה</u>: טריוויאלי ש- $1 \le \operatorname{Geo} a, \operatorname{Alg} a$. נראה כעת ש- $\operatorname{Geo} a \le \operatorname{Alg} a$. נניח ש- $\operatorname{Geo} a = m$. יהי $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ בסיס ל- V_a. נשלים אותו לבסיס ל- V כך $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$. המטריצה של T לפי בסיס זה היא

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & a & \\ & 0 & & \end{array}\right)$$

הפולינום האופייני הוא $\det(xI - A) = (x-a)^m q(x)$ כאשר $q(x) \in F[x]$. יכול להיות ש- $(x-a)$ מחלק את $q(x)$ ולכן $\operatorname{Alg} a$ יכול להיות גדול יותר מ- m אך בוודאי לא קטן יותר. ☺

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. T היא לכסינה אמ"מ סכום הריבויים הגאומטריים שלה הערכים העצמיים שלה הוא n.

<u>הוכחה</u>: זה רק ניסוח מחדש של המשפט מהסעיף הקודם. ☺

<u>משפט</u>: תהי $A \in M_n(F)$. אם הפולינום האופייני מתפרק לגמרי לגורמים לינאריים אז סכום הריבויים האלגבריים הוא n.

<u>הוכחה</u>: ידוע ש- $\deg p_A(x) = n$ ולכן המשפט נובע מתכונות הדרגה של מכפלת פולינומים[9]. ☺

---

[9] ראה נספח ב'.

<u>משפט</u>: תהי $A \in M_n(F)$. A לכסינה אמ"מ הפולינום האופייני מתפרק לגמרי לגורמים לינאריים וכן לכל ערך עצמי a מתקיים $\text{Geo}\, a = \text{Alg}\, a$.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) אם A לכסינה יהיו $a_1,...,a_k$ כל הערכים העצמיים השונים שלה. ראינו כבר שהפולינום האופייני מתפרק לגמרי ולכן $\sum_{i=1}^{k} \text{Alg}\, a_i = n$. כמו כן לפי משפט קודם אז $\sum_{i=1}^{k} \text{Geo}\, a_i = n$. אבל $1 \le \text{Geo}\, a_i \le \text{Alg}\, a_i$ ומכאן שחייב להתקיים $\text{Geo}\, a_i = \text{Alg}\, a_i$.

($\Rightarrow$) נניח שהפולינום האופייני מתפרק לגמרי. יהיו $a_1,...,a_k$ הערכים העצמיים השונים של A . אזי $\sum_{i=1}^{k} \text{Alg}\, a_i = n$. אם $\text{Geo}\, a_i = \text{Alg}\, a_i$ אז $\sum_{i=1}^{k} \text{Geo}\, a_i = n$ ולפי משפט קודם זה גורר ש- A לכסינה. ☺

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n ותהי $T:V \to V$ העתקה לינארית. T היא לכסינה אמ"מ הפולינום המינימלי שלה מתפרק לגמרי לגורמים לינאריים שונים.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח ש- T לכסינה. תהי A המטריצה האלכסונית המייצגת אותה ע"י בסיס כלשהו. הפולינום המינימלי של A הוא הפולינום המינימלי של T. יהיו $a_1,...,a_k$ כל הערכים העצמיים השונים של A . אלה הם כמובן איברי האלכסון של A . נסתכל על הפולינום $g(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)$.

לכל $1 \le i \le k$ $A-a_iI$ היא מטריצה אלכסונית שבה יש אפסים באותם מקומות באלכסון שבהם ב- A מופיע הערך העצמי a_i . ולכן ברור ש- $g(A)=\prod_{i=1}^{k}(A-a_iI)=\tilde{0}$. ברור שזהו הפולינום המינימלי משום ששורשי הפולינום המינימלי הם בדיוק הערכים העצמיים של A ובפולינום זה מופיעים כל הערכים העצמיים בריבוי 1, לכן לא ניתן להחסיר אף גורם וזהו פולינום שמתפרק לגמרי לגורמים לינאריים שונים.

($\Rightarrow$) נניח שהפולינום המינימלי של T מתפרק לגמרי לגורמים לינאריים שונים, כלומר $m(x)=m_T(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)$ ו- $a_1,...,a_k$ הם בדיוק הערכים העצמיים השונים של T. אם $k=1$ אז T סקלרית ובוודאי לכסינה. לכן מעכשיו נניח ש- $1<k$. לכל $1 \le j \le k$ נגדיר פולינום $p_j(x)=\prod_{i\ne j}\frac{x-a_i}{a_j-a_i}$. ברור ש- $\deg p_j(x)=k-1$ ומתקיים $p_j(a_i)=\delta_{i,j}$.

יהי $h(x)$ פולינום כך ש- $\deg h(x) \le k-1$. אזי $h(x)=h(a_1)p_1(x)+...+h(a_k)p_k(x)$, שהרי הפולינום $h(x)-\left(h(a_1)p_1(x)+...+h(a_k)p_k(x)\right)$ מתאפס לכל a_i כאשר $1 \le i \le k$, ואם אינו פולינום האפס אז קיבלנו k שורשים לפולינום ממעלה קטנה מ- k בסתירה.

נבחר $h(x)\equiv 1$ ו- $h(x)=x$ ונקבל $1=p_1(x)+...+p_k(x)$ ו- $x=a_1p_1(x)+...+a_kp_k(x)$ *.

נסמן $E_j=p_j(T)$. לכן מ-(*) נקבל ש- $I=E_1+...+E_k$ ו- $T=a_1E_1+...+a_kE_k$ **.

אם $i \ne j$ אז $m(x)\,|\,(p_i(x)p_j(x))$ ולכן $p_i(T)p_j(T)=0$, כלומר $E_iE_j=0$ ***.

מצד שני, ברור שלכל $1 \le j \le k$ $E_j \ne 0$ כי אם $p_j(T)=0$ הייתה מתקבלת סתירה למינימליות של $m(x)$.

לכל $1 \le j \le k$ נכפול את שני אגפי (**) ב- E_j ומתוך (***) נקבל ש- $E_j=E_j^2$ ****.

כעת נראה שלכל $1 \le j \le k$ מתקיים $\text{Im}\, E_j = V_{a_j}$. די להראות שלכל $\alpha \in \text{Im}\, E_j$ מתקיים $T\alpha = a_j\alpha$.

יהי $\beta \in V$ כך ש- $\alpha = E_j\beta$, אזי לפי (**) $T\alpha = TE_j\beta = (a_1E_1+...+a_kE_k)E_j\beta$. לכן מתוך (***) נקבל ש- $T\alpha = a_jE_j^2\beta$ ומ-(****) $T\alpha = a_jE_j\beta = a_j\alpha$.

יהי $\alpha \in V$. לפי (**) $\alpha = I\alpha = E_1\alpha + ... + E_k\alpha \in \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} E_i$. לכן $V \subset \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} E_i$ ולכן $V \subset \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} V_{a_i}$.

ההכלה בכיוון ההפוך ברורה ולכן $V = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} V_{a_i}$. ידוע שסכום של מרחבים עצמיים הוא סכום ישר.

לכן $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} V_{a_i} = V$ ומכאן ש- T לכסינה. ☺

3. מרחבי מכפלה פנימית

בפרק זה כאשר נאמר שדה F הכוונה היא או לשדה הממשיים $\mathbb{R}$ או לשדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

3.1. מרחבים אוקלידיים

<u>הגדרה</u>: **מכפלה סקלרית** במרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$, זו העתקה המתאימה לכל זוג וקטורים $\alpha,\beta\in V$ סקלר ב- $\mathbb{R}$, המסומן $\langle\alpha,\beta\rangle$ באופן שמתקיים לכל $\alpha,\alpha',\beta\in V$ ולכל $a\in\mathbb{R}$:

א. סימטריות: $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$

ב. לינאריות: $\langle\alpha+\alpha',\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\alpha',\beta\rangle$

ג. הומוגניות: $\langle a\alpha,\beta\rangle=a\langle\alpha,\beta\rangle$

ד. חיוביות: $0<\langle\alpha,\alpha\rangle$ עבור $\alpha\neq 0$.

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ עם מכפלה סקלרית מסוימת בו נקרא **מרחב אוקלידי**.

<u>טענה</u>: יהי V מרחב אוקלידי. אזי לכל $\alpha,\beta,\beta'\in V$ ולכל $b\in\mathbb{R}$ מתקיים:

1. $\langle\alpha,\beta+\beta'\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\alpha,\beta'\rangle$
2. $\langle\alpha,b\beta\rangle=b\langle\alpha,\beta\rangle$

<u>הוכחה</u>: נשתמש בסימטריות ובלינאריות ובהומוגניות של המכפלה הסקלרית.

1. $\langle\alpha,\beta+\beta'\rangle=\langle\beta+\beta',\alpha\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle+\langle\beta',\alpha\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\alpha,\beta'\rangle$
2. $\langle\alpha,b\beta\rangle=\langle b\beta,\alpha\rangle=b\langle\beta,\alpha\rangle=b\langle\alpha,\beta\rangle$. ☺

<u>טענה</u>: יהי V מרחב אוקלידי. אזי לכל $\alpha\in V$ $\langle\alpha,0\rangle=0$ וכן $\langle\alpha,\alpha\rangle=0$ אמ"מ $\alpha=0$.

<u>הוכחה</u>:

1. $\langle\alpha,0\rangle=\langle\alpha,0\cdot 0\rangle=0\cdot\langle\alpha,0\rangle=0$
2. כמובן $\langle 0,0\rangle=0$. וידוע לפי ההגדרה שלכל $\alpha\neq 0$ $0<\langle\alpha,\alpha\rangle$ ולכן אם $\langle\alpha,\alpha\rangle=0$ זה יכו לקרות רק אם $\alpha=0$. ☺

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב אוקלידי. **הנורמה** של וקטור $\alpha\in V$ מוגדרת ע"י $\|\alpha\|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$. נשים לב שהנורמה מוגדרת היטב בגלל תכונת החיוביות. **קוסינוס הזווית** בין שני וקטורים $\alpha,\beta\neq 0$ מוגדר ע"י $\cos(\alpha,\beta)=\dfrac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|}$. הקוסינוס מוגדר היטב משום שעבור $\alpha\neq 0$ $\|\alpha\|\neq 0$.

נאמר ש- $\alpha,\beta\in V$ **אורתוגונליים** (או **ניצבים**) אם $\langle\alpha,\beta\rangle=0$. במקרה זה נסמן $\alpha\perp\beta$.

<u>דוגמאות</u>:

1. יהי $V=\mathbb{R}^n$. המכפלה הסקלרית הרגילה מוגדרת ע"י $\langle(a_1,...,a_n),(b_1,...,b_n)\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$. קל לראות שהמכפלה הסקלרית הרגילה היא אכן מכפלה סקלרית ועומדת בכל דרישות ההגדרה. הנורמה אז היא $\|(a_1,...,a_n)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$.

2. יהי V מרחב וקטורי כלשהו מעל $\mathbb{R}$ ויהי $\alpha_1,...,\alpha_n$ בסיס ל- V. יהיו $\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i$ ו- $\beta=\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i$. נגדיר $\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$. קל לראות שזוהי מכפלה סקלרית. למעשה הדוגמה הקודמת היא מקרה פרטי שלה כאשר $V=\mathbb{R}^n$ והבסיס הוא הבסיס הסטנדרטי.
3. יהי V מרחב כל הפונקציות הממשיות הרציפות בקטע $[-1,1]$ - $V=\mathfrak{C}[-1,1]$ עם פעולות חיבור וכפל בממשי הרגילות על פונקציות. אזי $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$ היא מכפלה סקלרית. ההוכחה נובעת בקלות מתכונות אלמנטריות של אינטגרלים.

<u>משפט הקוסינוסים</u>: יהי V מרחב אוקלידי ויהיו $\alpha,\beta\in V$. אזי

$$\|\alpha-\beta\|^2=\|\alpha\|^2-2\|\alpha\|\|\beta\|\cos(\alpha,\beta)+\|\beta\|^2$$

<u>הוכחה</u>: נשתמש בהגדרת הנורמה והמכפלה הסקלרית כדי לפתח את הביטוי $\|\alpha-\beta\|^2$:

$\|\alpha-\beta\|^2=\langle\alpha-\beta,\alpha-\beta\rangle=\langle\alpha,\alpha-\beta\rangle-\langle\beta,\alpha-\beta\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle-\langle\alpha,\beta\rangle-\langle\beta,\alpha\rangle+\langle\beta,\beta\rangle$. ומהסימטריות נקבל ש- $\|\alpha-\beta\|^2=\|\alpha\|^2-2\langle\alpha,\beta\rangle+\|\beta\|^2$. אבל לפי ההגדרה $\langle\alpha,\beta\rangle=\|\alpha\|\|\beta\|\cos(\alpha,\beta)$. ☺

<u>משפט פיתגורס</u>: יהי V מרחב אוקלידי ויהיו $\alpha,\beta\in V$. אזי $\|\alpha-\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|$ אמ"מ $\alpha\perp\beta$.

<u>הוכחה</u>: לפי הגדרת הקוסינוס ברור ש- $\langle\alpha,\beta\rangle=0$ אמ"מ $\cos(\alpha,\beta)=0$. כעת המשפט נובע ממשפט הקוסינוסים. ☺

3.2. מרחבי מכפלה פנימית

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחה וקטורי מעל F. **מכפלה פנימית** ב- V זו העתקה המתאימה לכל זוג וקטורים $\alpha,\beta\in V$ סקלר $\langle\alpha,\beta\rangle\in F$ באופן שמתקיים לכל $\alpha,\alpha',\beta\in V$ ולכל $a\in F$:

א. הרמיטיות: $\langle\alpha,\beta\rangle=\overline{\langle\beta,\alpha\rangle}$[10]

ב. לינאריות: $\langle\alpha+\alpha',\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\alpha',\beta\rangle$

ג. הומוגניות: $\langle a\alpha,\beta\rangle=a\langle\alpha,\beta\rangle$

ד. חיוביות: $0<\langle\alpha,\alpha\rangle$ עבור $\alpha\neq0$.

מרחב וקטורי V מעל F עם מכפלה פנימית מסוימת בו נקרא **מרחב מכפלה פנימית**.
במקרה ש- $F=\mathbb{C}$, המכפלה הפנימית נקראת **מכפלה הרמיטית** ומרחב המכפלה הפנימית נקרא **מרחב אוניטרי**.

<u>דוגמה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ עם בסיס $\alpha_1,...,\alpha_n$. עבור $\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i$ ו- $\beta=\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i$ נגדיר $\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}$. קל לראות שהתאמה זו מגדירה מכפלה הרמיטית על V.

<u>למה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F. אזי לכל $\alpha,\beta,\beta'\in V$ ולכל $b\in F$ מתקיים:

א. $\langle\alpha,\beta+\beta'\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\alpha,\beta'\rangle$

ב. $\langle\alpha,b\beta\rangle=\overline{b}\langle\alpha,\beta\rangle$

<u>הוכחה</u>: לפי הגדרת המכפלה הפנימית:

---

[10] ומכאן ש- $\langle\alpha,\alpha\rangle\in\mathbb{R}$ לכל $\alpha\in V$

א. $\langle \alpha, \beta+\beta' \rangle = \overline{\langle \beta+\beta', \alpha \rangle} = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle + \langle \beta', \alpha \rangle} = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle} + \overline{\langle \beta', \alpha \rangle} = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \beta' \rangle$

ב. $\langle \alpha, b\beta \rangle = \overline{\langle b\beta, \alpha \rangle} = \overline{b\langle \beta, \alpha \rangle} = \overline{b} \cdot \overline{\langle \beta, \alpha \rangle} = \overline{b}\langle \alpha, \beta \rangle$. ☺

הגדרה: יהי V מרחב מכפלה פנימית מכל F. **הנורמה** של וקטור $\alpha \in V$ מוגדרת ע"י $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. נשים לב שהנורמה מוגדרת היטב בגלל תכונת החיוביות. **קוסינוס הזווית** בין שני וקטורים $\alpha, \beta \neq 0$ מוגדר ע"י $\cos(\alpha, \beta) = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|}$. הקוסינוס מוגדר היטב משום שעבור $\alpha \neq 0$ $\|\alpha\| \neq 0$.

נאמר ש- $\alpha, \beta \in V$ **אורתוגונליים** (או **ניצבים**) אם $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. במקרה זה נסמן $\alpha \perp \beta$.

<u>למה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F. אזי לכל $\alpha, \beta \in V$ ולכל $a \in F$:

1. $\|\alpha\| = 0$ אמ"מ $\alpha = 0$
2. $\|a\alpha\| = |a|\|\alpha\|$
3. $\|\alpha \pm \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \pm 2\operatorname{Re}\langle \alpha, \beta \rangle + \|\beta\|^2$

<u>הוכחה</u>:

1. נובע ישירות מהגדרת המכפלה הפנימית.
2. $\|a\alpha\|^2 = \langle a\alpha, a\alpha \rangle = a\overline{a}\langle \alpha, \alpha \rangle = |a|^2 \|\alpha\|^2$. ולכן $\|a\alpha\| = |a|\|\alpha\|$.
3. $\|\alpha+\beta\|^2 = \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle + \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle + \langle \beta, \beta \rangle =$
$= \langle \alpha, \alpha \rangle + \langle \alpha, \beta \rangle + \overline{\langle \alpha, \beta \rangle} + \langle \beta, \beta \rangle = \|\alpha\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \alpha, \beta \rangle + \|\beta\|^2$
באותו אופן עבור $\|\alpha-\beta\|^2$. ☺

<u>משפט פיתגורס</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית. אזי $\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$ אמ"מ $\alpha \perp \beta$.

<u>הוכחה</u>: נובע באופן מיידי מכך ש- $\|\alpha \pm \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \pm 2\operatorname{Re}\langle \alpha, \beta \rangle + \|\beta\|^2$. ☺

<u>אי שוויון קושי-שוורץ</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F. אזי לכל $\alpha, \beta \in V$ מתקיים $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$ ושוויון מתקיים אמ"מ α ו- β תלויים לינארית.

<u>הוכחה</u>: ברור ש- $0 \leq \|\alpha + x\beta\|^2$ לכל $x \in \mathbb{R}$. אבל לפי למה קודמת:

$$\|\alpha + x\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \alpha, x\beta \rangle + x^2\|\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2x\operatorname{Re}\langle \alpha, \beta \rangle + x^2\|\beta\|^2 = x^2\|\beta\|^2 + 2x\operatorname{Re}\langle \alpha, \beta \rangle + \|\alpha\|^2$$

אבל כמובן $\operatorname{Re}\langle \alpha, \beta \rangle \leq |\langle \alpha, \beta \rangle|$ לכן צריך להתקיים $|2\langle \alpha, \beta \rangle|^2 - 4\|\beta\|^2\|\alpha\|^2 \leq 0$ ומכאן ש- $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$.

כעת נראה שיש שוויון אמ"מ הווקטורים תלויים.

($\Leftarrow$) נניח שיש שוויון, כלומר $|\langle \alpha, \beta \rangle| = \|\alpha\|\|\beta\|$. אם אחד מבין α, β הוא וקטור האפס אז כמובן הם תלויים לינארית. כעת נניח ששניהם שונים מווקטור האפס. אם הווקטורים לא תלויים לינארית אז לא קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $\alpha + x\beta = 0$ ולכן לכל $x \in \mathbb{R}$ $0 < \|\alpha + x\beta\|$. לכן למשוואה $x^2\|\beta\|^2 + 2|\langle \alpha, \beta \rangle| + \|\alpha\|^2 = 0$ אין פיתרון ומכאן ש- $|2\langle \alpha, \beta \rangle|^2 - 4\|\beta\|^2\|\alpha\|^2 < 0$, כלומר $|\langle \alpha, \beta \rangle| < \|\alpha\|\|\beta\|$ בסתירה.

($\Rightarrow$) נניח שהם תלויים. אם אחד מבין α, β הוא וקטור האפס אז ברור ש- $|\langle \alpha, \beta \rangle| = 0 = \|\alpha\|\|\beta\|$. אם שניהם שונים מווקטור האפס אזי קיים $\lambda \in \mathbb{Z}$ כך ש- $\alpha = \lambda\beta$. ואז $|\langle \alpha, \beta \rangle| = |\langle \alpha, \lambda\alpha \rangle| = |\overline{\lambda}\langle \alpha, \alpha \rangle| = |\lambda|\|\alpha\|^2 = \|\alpha\|\|\lambda\alpha\| = \|\alpha\|\|\beta\|$. ☺

<u>אי שוויון המשולש</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F. אזי לכל $\alpha,\beta\in V$ מתקיים $\|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$ ושוויון אמ"מ $\alpha=0$ או $\beta=\lambda\alpha$ כאשר λ ממשי אי שלילי.

<u>הוכחה</u>: לפי אי שוויון קושי-שוורץ ולפי למה קודמת מתקיים

$$*\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+2\operatorname{Re}\langle\alpha,\beta\rangle+\|\beta\|^2\le\|\alpha\|^2+2|\langle\alpha,\beta\rangle|+\|\beta\|^2\le\|\alpha\|^2+2\|\alpha\|^2\|\beta\|^2+\|\beta\|^2=(\|\alpha\|+\|\beta\|)^2$$

ומכאן ש- $\|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$.

כעת אם $\|\alpha+\beta\|=\|\alpha\|+\|\beta\|$ אז כל אי השוויונים ב-(*) הם שוויונים ולכן

$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+2\operatorname{Re}\langle\alpha,\beta\rangle+\|\beta\|^2=\|\alpha\|^2+2|\langle\alpha,\beta\rangle|+\|\beta\|^2=\|\alpha\|^2+2\|\alpha\|^2\|\beta\|^2+\|\beta\|^2=(\|\alpha\|+\|\beta\|)^2$$

ובפרט $|\langle\alpha,\beta\rangle|=\|\alpha\|\|\beta\|$. זה נכון אם $\alpha=0$ או אם $\alpha=\lambda\beta$. אבל גם $\operatorname{Re}\langle\alpha,\beta\rangle=|\langle\alpha,\beta\rangle|$ ולכן λ ממשי אי שלילי. ☺

<u>מסקנה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F. אזי לכל $\alpha,\beta\in V$ מתקיים $\|\alpha+\beta\|\ge\big|\|\alpha\|-\|\beta\|\big|$.

<u>הוכחה</u>: לפי אי שוויון המשולש מתקיים $\|\alpha\|=\|\alpha+\beta-\beta\|\le\|\alpha+\beta\|+\|\beta\|$ ולכן $\|\alpha\|-\|\beta\|\le\|\alpha+\beta\|$.

באותו אופן $\|\beta\|-\|\alpha\|\le\|\alpha+\beta\|$. ומכאן ש- $\|\alpha+\beta\|\ge\big|\|\alpha\|-\|\beta\|\big|$. ☺

3.3. מערכות אורתונורמליות

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד n מעל השדה F. יהיו $\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\in V$. הקבוצה $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\}$ תיקרא **מערכת אורתונורמלית** אם $\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\delta_{i,j}$ לכל $1\le i,j\le k$.

מערכת אורתונורמלית המהווה בסיס של V תיקרא **בסיס אורתונורמלי**.

<u>טענה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ותהי $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\}$ מערכת אורתונורמלית ב-V. אם $\alpha=\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i$ אז לכל $1\le i\le k$ מתקיים $a_i=\langle\alpha,\varepsilon_i\rangle$ והנורמה של α נתונה ע"י $\|\alpha\|^2=\sum_{i=1}^k|\langle\alpha,\varepsilon_i\rangle|^2$.

<u>הוכחה</u>: $\alpha=\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i$ ולכן לכל $1\le j\le k$ מתקיים

$$\langle\alpha,\varepsilon_j\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i,\varepsilon_j\right\rangle=\sum_{i=1}^k a_i\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\sum_{i=1}^k a_i\delta_{i,j}=a_i$$

והנורמה היא כמובן

$$\|\alpha\|^2=\left\langle\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i,\sum_{j=1}^k a_j\varepsilon_j\right\rangle=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k a_i\overline{a_j}\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k a_i\overline{a_j}\delta_{i,j}=\sum_{i=1}^k|a_i|^2=\sum_{i=1}^k|\langle\alpha,\varepsilon_i\rangle|^2.$$ ☺

<u>מסקנה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ותהי $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\}$ מערכת אורתונורמלית ב- V. אזי $\varepsilon_1,...,\varepsilon_k$ בלתי תלויים לינארית.

<u>הוכחה</u>: נניח ש- $\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i=0$. אזי לכל $1\le i\le k$ $a_i=\langle 0,\varepsilon_i\rangle$. ולכן $a_i=0$. לכן הווקטורים בלתי תלויים לינארית. ☺

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ותהי $B\subset V$ תת קבוצה. יהי $\alpha\in V$.
נאמר ש- α ניצב ל- B אם $\langle\alpha,\beta\rangle=0$ לכל $\beta\in B$. נסמן $\alpha\perp B$.

<u>הערה</u>: ברור ש- $\alpha \perp \operatorname{span}(\beta_1,...,\beta_k)$ אמ"מ $\alpha \perp \beta_i$ לכל $1 \le i \le k$.

<u>למה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ותהי $\{\varepsilon_1,..,\varepsilon_k\}$ מערכת אורתונורמלית ב- V ויהי $\alpha \in V$ כלשהו. אזי:

א. הווקטור $\gamma = \alpha - \sum_{i=1}^{k}\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ ניצב ל- $\operatorname{span}\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\}$

ב. $\|\gamma\|^2 = \|\alpha\|^2 - \sum_{i=1}^{k}|\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2$

<u>הוכחה</u>:

א. נראה שלכל $1 \le j \le k$ מתקיים $\gamma \perp \varepsilon_j$. ואכן, מאחר ש- $b_j = \left\langle \sum_{i=1}^{k} b_i \varepsilon_i, \varepsilon_j \right\rangle$ נקבל ש-

$$\langle \gamma, \varepsilon_j \rangle = \left\langle \alpha - \sum_{i=1}^{k}\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i, \varepsilon_j \right\rangle = \langle \alpha, \varepsilon_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{k}\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i, \varepsilon_j \right\rangle = \langle \alpha, \varepsilon_j \rangle - \langle \alpha, \varepsilon_j \rangle = 0$$

ב. נסמן $\beta = \sum_{i=1}^{k}\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ וכמובן $\beta \in \operatorname{span}\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\}$. לכן $\gamma \perp \beta$. ואז

$\|\gamma\|^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle = \langle \gamma, \alpha - \beta \rangle = \langle \gamma, \alpha \rangle - \langle \gamma, \beta \rangle = \langle \gamma, \alpha \rangle = \langle \alpha - \beta, \alpha \rangle = \|\alpha\|^2 - \langle \beta, \alpha \rangle$. אבל

$\langle \beta, \alpha \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k}\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i, \alpha \right\rangle = \sum_{i=1}^{k}\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \langle \varepsilon_i, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^{k}\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \overline{\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle} = \sum_{i=1}^{k}|\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2$. ☺

<u>מסקנה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ותהי $\{\varepsilon_1,..,\varepsilon_k\}$ מערכת אורתונורמלית ב- V. אזי:

א. <u>אי שוויון בסל</u>: לכל $\alpha \in V$ מתקיים $\sum_{i=1}^{k}|\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2 \le \|\alpha\|^2$

ב. $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\}$ בסיס אמ"מ לכל $\alpha \in V$ קיים שוויון ב-(א).

<u>הוכחה</u>:

א. נגדיר $\gamma = \alpha - \sum_{i=1}^{k}\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$. אזי לפי הטענה הקודמת $\|\gamma\|^2 = \|\alpha\|^2 - \sum_{i=1}^{k}|\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2$. אבל $0 \le \|\gamma\|^2$ ולכן $\sum_{i=1}^{k}|\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2 \le \|\alpha\|^2$.

ב. $\sum_{i=1}^{k}|\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2 = \|\alpha\|^2$ אמ"מ $0 = \alpha - \sum_{i=1}^{k}\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$, כלומר $\alpha = \sum_{i=1}^{k}\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ *. ידוע שהקבוצה $\{\varepsilon_1,..,\varepsilon_k\}$ היא בלתי תלויה ומ-(*) היא גם פורשת. לכן $\{\varepsilon_1,..,\varepsilon_k\}$ בסיס. ☺

<u>טענה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ותהי $\{\varepsilon_1,..,\varepsilon_k\}$ מערכת אורתונורמלית ב- V. יהי $\alpha \in V$ כלשהו. אזי הווקטור $\gamma = \alpha - \sum_{i=1}^{k}\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ הוא הקצר ביותר מבין כל הווקטורים שמחברים את α עם $\operatorname{span}\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\}$.

<u>משפט גראם-שמידט</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ויהי $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ בסיס של V. אזי קיים ל- V בסיס אורתונורמלי $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}$ כך ש- $\operatorname{span}\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\} = \operatorname{span}\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$ לכל $1 \le k \le n$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על k.

עבור $k=1$ נגדיר $\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$. ברור ש- $\{\varepsilon_1\}$ אורתונורמלית וכן $\operatorname{span}\{\varepsilon_1\} = \operatorname{span}\{\alpha_1\}$.

נניח שהגדרנו מערכת אורתונורמלית $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\}$ כך ש- $\operatorname{span}\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\} = \operatorname{span}\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$.

נגדיר $\varepsilon'_{k+1} = \alpha_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}\langle \alpha_{k+1}, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$. לפי טענה קודמת $\varepsilon'_{k+1} \perp \varepsilon_i$ לכל $1 \le i \le k$.

כעת $\operatorname{span}\{\alpha_1,...,\alpha_k\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\} \ni \sum_{i=1}^{k}\langle\alpha_{k+1},\varepsilon_i\rangle\varepsilon_i = \alpha_{k+1} - \varepsilon'_{k+1}$. לכן $\alpha_{k+1} \in \operatorname{span}\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k,\varepsilon'_{k+1}\}$ ו- $\varepsilon'_{k+1} \in \operatorname{span}\{\alpha_1,...,\alpha_k,\alpha_{k+1}\}$. ומכאן ש- $\operatorname{span}\{\alpha_1,...,\alpha_k,\alpha_{k+1}\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k,\varepsilon'_{k+1}\}$.
נראה ש- $\varepsilon'_{k+1} \neq 0$. אם כן, היינו מקבלים ש- בסתירה לאי תלות של $\alpha_1,...,\alpha_k,\alpha_{k+1}$. לכן $\varepsilon'_{k+1} \neq 0$
ולכן $\|\varepsilon'_{k+1}\| \neq 0$. נגדיר $\varepsilon_{k+1} = \frac{\varepsilon'_{k+1}}{\|\varepsilon'_{k+1}\|}$. ברור ש- $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_{k+1}\}$ מערכת אורתונורמלית וכן $\operatorname{span}\{\alpha_1,...,\alpha_{k+1}\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_{k+1}\}$. נמשיך בבניה לכל $k < n$ ולבסוף נקבל בסיס אורתונורמלי $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}$ (שהרי המערכת בלתי תלויה) כך ש- $\operatorname{span}\{\alpha_1,...,\alpha_k\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\}$ לכל $1 \le k \le n$. ☺

<u>מסקנה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ויהי $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ בסיס של V. כל מערכת אורתונורמלית ב- V ניתנת להשלמה לבסיס אורתונורמלי.

<u>משפט</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ויהי $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ בסיס של V. יהי $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ בסיס אורתונורמלי של V ויהיו $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i$ ו- $\beta = \sum_{j=1}^{n} b_j\varepsilon_j$. אזי $\langle\alpha,\beta\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}$.

<u>הוכחה</u>: $\langle\alpha,\beta\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} b_j\varepsilon_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{b_j}\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{b_j}\delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}$. ☺

3.4. המשלים הניצב

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ויהי U תת מרחב. **המשלים הניצב** של U ב- V הוא הקבוצה $U^{\perp} = \{\alpha \in V : \forall\beta \in U \ \langle\alpha,\beta\rangle = 0\}$.

<u>למה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ויהי U תת מרחב.
א. $U^{\perp}$ תת מרחב של V
ב. $U \subset U^{\perp\perp}$
ג. $U \cap U^{\perp} = \{0\}$

<u>הוכחה</u>:
א. ברור ש- $U^{\perp} \neq \varnothing$ כי $0 \in U^{\perp}$. יהיו $\alpha,\beta \in U^{\perp}$ ו- $c \in F$. אזי לכל $\gamma \in U$ מתקיים $\langle c\alpha+\beta,\gamma\rangle = c\langle\alpha,\gamma\rangle + \langle\beta,\gamma\rangle = 0$. לכן $c\alpha+\beta \in U^{\perp}$ ולכן זהו תת מרחב.
ב. יהי $\alpha \in U$. נראה ש- $\alpha \in U^{\perp\perp} = \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$. אבל זה ברור, כי אם $\alpha \perp U^{\perp}$ אז לפי הגדרת $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ נקבל ש- $\alpha \in \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.
ג. אם $\alpha \in U \cap U^{\perp}$ אז $\langle\alpha,\alpha\rangle = 0$ ולכן $\alpha = 0$. ☺

<u>משפט</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ויהי U תת מרחב. אזי $V = U + U^{\perp}$.
<u>הוכחה</u>: V נוצר סופית ולכן גם U נוצר סופית. יהי $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_r\}$ בסיס אורתונורמלי ל- U לפי משפט גראם-שמידט. יהי $\alpha \in V$. נסמן $\beta = \sum_{i=1}^{r}\langle\alpha,\varepsilon_i\rangle\varepsilon_i \in U$ ו- $\gamma = \alpha - \beta$. לפי טענה קודמת $\gamma \in U^{\perp}$. ואז $\alpha = \beta + \gamma$, כלומר $V = U + U^{\perp}$. ☺

<u>מסקנה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ויהי U תת מרחב. אזי $V = U \oplus U^{\perp}$.

<u>מסקנה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ויהי U תת מרחב. אזי $\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$.

<u>מסקנה</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ממימד n ויהי U תת מרחב. אזי $U = U^{\perp\perp}$.
<u>הוכחה</u>: ראינו כבר ש-$U \subset U^{\perp\perp}$. נראה ש-$\dim U = \dim U^{\perp\perp}$ ונקבל את הטענה. לפי המסקנה הקודמת $\dim U^{\perp\perp} = n - \dim U^{\perp} = n - (n - \dim U) = \dim U$. ☺

נספח א – תזכורות מאלגברה לינארית 1

<u>הגדרה</u>: קבוצה F עם הפעולות הדו-מקומיות חיבור ($+_F$) וכפל ($\cdot_F$) תיקרא **שדה** אם מתקיימות התכונות הבאות אשר נקראות **אקסיומות השדה**:

1. אקסיומות החיבור:
   a. סגירות: לכל $a,b\in F$ $a+_F b\in F$
   b. קומוטטיביות: לכל $a,b\in F$ $a+_F b=b+_F a$
   c. אסוציאטיביות: לכל $a,b,c\in F$ $(a+_F b)+_F c=a+_F(b+_F c)$
   d. קיום איבר ניטרלי לחיבור: קיים $0_F\in F$ כך שלכל $a\in F$ $a+_F 0_F=a$
   e. קיום איבר נגדי לחיבור: לכל $a\in F$ קיים $-a\in F$ כך ש- $a+_F(-a)=0_F$
2. אקסיומות הכפל:
   a. סגירות: לכל $a,b\in F$ $a\cdot_F b\in F$
   b. קומוטטיביות: לכל $a,b\in F$ $a\cdot_F b=b\cdot_F a$
   c. אסוציאטיביות: לכל $a,b,c\in F$ $(a\cdot_F b)\cdot_F c=a\cdot_F(b\cdot_F c)$
   d. קיום איבר ניטרלי לכפל: קיים $0_F\neq 1_F\in F$ כך שלכל $a\in F$ $a\cdot_F 1_F=a$
   e. קיום איבר הופכי לכפל: לכל $a\in F$ אם $a\neq 0_F$ קיים $a^{-1}\in F$ כך ש- $a\cdot_F a^{-1}=1_F$
3. דיסטריביוטיביות: לכל $a,b,c\in F$ $a\cdot_F(b+_F c)=a\cdot_F c+_F b\cdot_F c$

<u>טענה</u>: אם F שדה אזי לכל $a,b,c\in F$ מתקיימות התכונות הבאות:

1. תכונת הצמצום בחיבור: $a+c=b+c \Leftarrow a=b$
2. תכונת הצמצום בכפל: אם $c\neq 0$ מתקיים $ac=bc \Leftarrow a=b$
3. $0\cdot a=0$
4. אם $a\neq 0$ מתקיים $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$
5. $-(-a)=a$
6. $(-1)a=-a$
7. $(-a)(-b)=ab$
8. $(-a)b=a(-b)=-(ab)$
9. $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$
10. אם $ab=0$ אז $a=0$ או $b=0$
11. האיברים הניטרליים לגבי הכפל והחיבור הם יחידים.

<u>הגדרה</u>: נגדיר **ערך מוחלט** של מספר מרוכב ע"י $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ **וצמוד** של מספר מרוכב $\overline{a+bi}=a-bi$.

<u>הגדרה</u>: יהי $z=a+bi\in\mathbb{C}$. ההצגה הקוטבית של z היא $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\operatorname{cis}\theta$ כאשר $r=|z|$ ו- $\theta=\arctan\frac{b}{a}$. כמו כן נגדיר $e^{i\theta}=\operatorname{cis}\theta$.

<u>טענה</u>: לכל $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ מתקיים:

1. $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$
2. $|z_1|=|\overline{z_1}|$

3. $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1}$
4. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$
5. $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
6. $z_1 = \overline{z_1}$ אמ"מ $z_1 \in \mathbb{R}$
7. אם $z_1 = r\operatorname{cis}\theta$ אז $z_1^n = |\overline{z_1}|^n \operatorname{cis} n\theta$
8. אי שיוויון המשולש : $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

<u>משפט</u> : למשוואה $\operatorname{cis}\alpha = x^n$ יש במרוכבים n פתרונות שונים : $x_i = \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha+(i-1)2\pi}{n}\right), i=1,...,n$

<u>טענה</u> : יהי $n \in \mathbb{N}^+$. לכל $m \in \mathbb{Z}$ קיימים $q,r \in \mathbb{Z}$ כאשר $0 \le r \le n-1$ כך ש- $m = qn+r$.

<u>טענה</u> : יהיו $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. אזי $m_1 \equiv m_2 \pmod n$ אמ"מ השארית של m_1 בחלוקה ב- n שווה לשארית של m_2 בחלוקה ב- n.

<u>משפט</u> : לכל $1 < n \in \mathbb{N}$ ב- $\mathbb{Z}_n$ עם הפעולות $+_n, \cdot_n$ מתקיימות כל אקסיומות השדה מלבד אולי קיום הופכי כפלי.

<u>משפט</u> : אם $n > 1$ לא ראשוני אז $\mathbb{Z}_n$ אינו שדה.

<u>משפט</u> : אם p ראשוני אז $\mathbb{Z}_p$ שדה.

<u>משפט</u> : לכל p ראשוני ולכל $m > 0$ יש שדה עם p^m איברים למעשה יש שדה יחיד כזה עד כדי איזומורפיזם.

<u>משפט</u> : יהי שדה F. אזי מתקיים אחד מהבאים :
1. לכל $m,n \in \mathbb{Z}$ כך ש- $m \ne n$ מתקיים $m \times 1_F \ne n \times 1_F$
2. קיים ראשוני p כך ש- $p \times 1_F = 0_F$.

<u>הגדרה</u> : בתנאי המשפט הקודם, במקרה הראשון נאמר ש- $\operatorname{char} F = 0$ והשדה הוא עם **מציין** 0. ואילו אחרת נאמר ש- $\operatorname{char} F = p$ והמציין של השדה הוא p.

<u>הגדרה</u> : יהיו F,S שדות. נאמר שהם **איזומורפיים** אם קיים ביניהם **איזומורפיזם**, כלומר העתקה $f : F \to S$ חח"ע ועל כך שלכל $a,b \in F$ היא שומרת על הפעולות :

$$f(a +_F b) = f(a) +_S f(b)$$
$$f(a \cdot_F b) = f(a) \cdot_S f(b)$$

<u>הגדרה</u> : יהי F שדה ותהי $K \subset F$ תת קבוצה. נאמר ש- K תת שדה אם היא מקיימת את כל אקסיומות השדה ביחס לפעולות שמוגדרות על F.

<u>משפט</u> : אם $\operatorname{char} F = p > 0$ אז קיים תת שדה K של F איזומורפי ל- $\mathbb{Z}_p$.

<u>משפט</u> : אם F שדה ו- $\operatorname{char} F = 0$ אז קיים תת שדה $K \subset F$ כך ש- K איזומורפי ל- $\mathbb{Q}$.

<u>הגדרה</u> : יהי F שדה. **מרחב וקטורי מעל שדה** F הוא קבוצה של איברים (שנקרא להם **וקטורים**) שמוגדרות עליה פעולת חיבור של וקטורים ופעולת כפל באיברי השדה (שנקרא להם **סקלרים**), כך שמתקיימות האקסיומות הבאות : לכל $w,u,v \in V$ ו- $a,b \in F$:
1. אקסיומות החיבור :

a. סגירות $u+v\in V$
b. חילופיות $u+v=v+u$
c. קיבוציות $(u+v)+w=u+(u+w)$
d. קיום איבר ניטרלי לחיבור שנמסמנו 0_V כך ש- $v+0_V=v$
e. קיום איבר נגדי לחיבור נסמנו $-v$ כך ש- $v+(-v)=0_V$

2. אקסיומות הכפל בסקלר:
a. סגירות $a\cdot v\in V$
b. $1_F\cdot v=v$
c. $(ab)\cdot v=a\cdot(b\cdot v)$
d. $(a+b).v=a\cdot v+b\cdot v$
$a\cdot(v+w)=a\cdot v+a\cdot w$

<u>טענה</u>: יהי F שדה ויהי V מרחב וקטורי מעל F. אזי לכל $c\in F$ ולכל $u,v,s\in V$ מתקיימות התכונות הבאות:

1. $-(-u)=u$
2. $-(u+v)=-u-v$
3. $0_F\cdot u=0_V$
4. $(-1_F)\cdot u=-u$
5. אם $cu=0_V$ אז $c=0_F$ או $u=0_V$
6. אם $u+s=v+s$ אז $u=v$

<u>טענה</u>: לכל $n\in\mathbb{N}$ F^n מרחב וקטורי מעל F.

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. נאמר ש- $v_1,...,v_n\in V$ **תלויים לינארית** אם קיימים סקלרים $c_1,...,c_n\in F$ כך שקיים $1\le i\le n$ שעבורו $c_i\ne 0_F$ (כלומר לא כולם אפס) ומתקיים $\sum_{i=1}^{n}c_iv_i=0_V$. אחרת $v_1,...,v_n$ נקראים **בלתי תלויים לינארית** (להלן בת״ל).

<u>הגדרה</u>: יהי U מרחב וקטורי מעל שדה F. יהיו $u_1,...,u_k\in U$ ויהיו $a_1,...,a_k\in F$. הווקטור $\sum_{i=1}^{k}a_iu_i$ נקרא **צירוף לינארי** של $u_1,...,u_k$ עם מקדמים $a_1,...,a_k$. **צירוף לינארי טריוויאלי** הוא צירוף לינארי עם מקדמים שכולם אפס $a_1=...=a_k=0_F$.

<u>משפט</u>: יהי $0\le m\in\mathbb{Z}$ ויהי F שדה. יהיו $v_1,...,v_n\in F^m$ כאשר $m<n$. אזי $v_1,...,v_n$ תלויים לינארית.

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. נאמר שהווקטורים $v_1,...,v_n\in V$ **פורשים** (או **יוצרים**) את V כאשר כל וקטור ב- V ניתן להצגה כצירוף לינארי של $v_1,...,v_n$. במקרה כזה נאמר ש- V **נוצר סופית**.

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. ויהיו $v_1,...,v_m\in V$ פורשים את V. אם $w_1,...,w_l\in V$ ו- $m<l$ אזי $w_1,...,w_l$ תלויים לינארית.

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. קבוצת הווקטורים $v=\{v_1,...,v_n\}$ תיקרא **בסיס** אם V נפרש ע״י v ו- v בלתי תלויה לינארית.

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. אם $v_1,...,v_n\in V$ בסיס וגם $w_1,...,w_l\in V$ בסיס אזי $n=l$.

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית. מספר האיברים בבסיס של V נקרא **המימד** של V ומסומן $\dim_F V$ (לפי המשפט הקודם המימד של המרחב מוגדר היטב).

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. יהיו $v_1,...,v_n \in V$. התנאים הבאים שקולים:
1. $v_1,...,v_n$ בסיס של V
2. לכל וקטור $v \in V$ קיימת הצגה יחידה כצירוף לינארי של $v_1,...,v_n$

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תת-קבוצה $U \subset V$ נקראת **תת-מרחב** אם U מקיימת את כל אקסיומות המרחב הווקטורי ביחס לפעולות שמוגדרות על V.

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תהי $U \subset V$ תת קבוצה. U תת מרחב אמ"מ מתקיימים שלושת התנאים הבאים:
1. U לא ריקה
2. U סגורה תחת חיבור של וקטורים
3. U סגורה תחת כפל בסקלר.

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. יהיו $u_1,...,u_k \in V$ כאשר $1 \le k$. נגדיר: **תת המרחב הנפרש** ע"י $u_1,...,u_k$ הוא $\text{span}(u_1,...,u_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i u_i : c_i \in F \right\}$. עבור $k=0$ נגדיר $\text{span}(\ ) = \{0_V\}$. בכל מקרה ברור ש- $\text{span}(u_1,...,u_k) \subset V$.

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו $u_1,...,u_k \in V$. אזי $\text{span}(u_1,...,u_n)$ תת מרחב וקטורי של V.

<u>הגדרה</u>: יהי F שדה ו- x משתנה. נגדיר $F[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i : a_i \in F, 0 \le n \right\}$ - קבוצת כל הפולינומים במשתנה x עם מקדמים משדה F. חיבור פולינומים וכפל בסקלר יתבצעו בצורה המוכרת לנו.

<u>טענה</u>: $F[x]$ מרחב וקטורי מעל F.

<u>משפט</u>: ל-$F[x]$ אין בסיס סופי.

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F שקיים לו בסיס $v_1,...,v_n$. יהי $U \subset V$ תת מרחב. אזי ל- U קיים בסיס.

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהי $U \subset V$ תת מרחב. אם $\dim_F V = \dim_F U$ אז $U = V$.

<u>משפט</u>: יהי $V = \text{span}(u_1,...,u_m)$. אזי הקבוצה $B = \{u_i : u_1 \ne 0_V, 1 \le i \le m, u_i \notin \text{span}(u_1,...,u_{i-1})\}$ היא בסיס ל- V.

<u>משפט</u>: יהי $V = \text{span}(u_1,...,u_m)$ ויהיו $v_1,...,v_k \in V$ בלתי תלויים לינארית. ניתן להשלים את $v_1,...,v_k$ לבסיס ע"י וקטורים מ- $\{u_1,...,u_m\}$.

<u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי ותהי $B = \{v_1,...,v_n\}$ קבוצת וקטורים ב- V. אזי התנאים הבאים שקולים:
1. B בסיס של V
2. B קבוצה פורשת מינימלית
3. B קבוצה בלתי תלויה לינארית מקסימלית

<u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו $U,W\subset V$ תת מרחבים. אזי החיתוך $U\cap W$ גם כן תת מרחב של V.

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב וקטורי ויהיו $U,W\subset V$ תת מרחבים. נסמן $U+W=\{u+w:u\in U,w\in W\}$.

<u>טענה</u>: יהי V מרחב וקטורי ויהיו $U,W\subset V$ תת מרחבים. אזי $U+W$ תת מרחב וקטורי של V.

<u>משפט</u>: יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה F. יהיו $U,W\subset V$ תת מרחבים. אזי

$$\dim_F(U+W)=\dim_F U+\dim_F V-\dim_F(U\cap W)$$

<u>טענה</u>: יהי F שדה בעל מציין $p>0$. אזי קיים n כך ש- $|F|=p^n$.

<u>הגדרה</u>: יהי שדה F ויהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F. ותהי $f:V\to W$ העתקה ביניהם. נאמר שההעתקה f היא **לינארית** כאשר מתקיימים שני התנאים הבאים:

$$f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)\qquad \forall v_1,v_2\in V$$
$$f(cv)=cf(v)\qquad \forall v\in V,\forall c\in F$$

<u>טענה</u>: יהיו V,U,W מרחבים וקטוריים מעל שדה F. יהיו $f:V\to U$ ו- $g:U\to W$ העתקות לינאריות. אזי $g\circ f:V\to W$ לינארית.

<u>טענה</u>: אם $f:V\to W$ העתקה לינארית חח"ע ועל אזי גם $f^{-1}:W\to V$ לינארית.

<u>טענה</u>: תהי $f:V\to W$ העתקה לינארית. אזי $f(0_V)=0_W$.

<u>הגדרה</u>: תהי $f:V\to W$ העתקה לינארית. נגדיר:

1. **הגרעין** של ההעתקה: $\ker f=\{v\in V: f(v)=0\}$
2. **התמונה** של ההעתקה: $\operatorname{Im} f=\{w\in W:\exists v\in V\ f(v)=w\}$

<u>טענה</u>: יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F ותהי העתקה לינארית $f:V\to W$. אזי

1. הגרעין של ההעתקה הוא תת מרחב של V
2. התמונה של ההעתקה היא תת מרחב של W

<u>טענה</u>: $f:V\to W$ חח"ע אמ"מ $\ker f=\{0_V\}$

<u>טענה</u>: יהיו $f:V\to W, g:W\to U$. אזי $\ker f\subseteq \ker(gf)$.

<u>משפט המימדים</u> יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית ותהי $f:V\to W$ העתקה לינארית. אזי

$$\dim_F\ker f+\dim_F\operatorname{Im} f=\dim_F V$$

<u>מסקנה</u>: תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית כאשר $\dim V=n=\dim W$. אזי T חח"ע אמ"מ T על.

<u>הגדרה</u>: יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F. נסמן $\operatorname{Hom}_F(V,W)=\{f:V\to W\mid f \text{ is linear}\}$. נגדיר על קבוצה זו (קבוצת כל ההעתקות הלינאריות מ- V ל- W) מבנה של מרחב וקטורי מעל F.

1. חיבור: אם $f,g\in\operatorname{Hom}_F(V,W)$ אז נגדיר לכל $v\in V$ $(f+g)(v)=f(v)+g(v)$
2. כפל בסקלר: אם $f\in\operatorname{Hom}_F(V,W), c\in F$ נגדיר לכל $v\in V$ $(cf)(v)=cf(v)$.

<u>טענה</u>: $\operatorname{Hom}_F(V,W)$ עם הפעולות שהגדרנו למעלה הוא מרחב וקטורי מעל F.

<u>משפט</u>: יהי V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה. יהיו $v_1,...,v_n \in V$ בסיס. אזי לכל $w_1,...,w_n \in W$ קיימת העתקה לינארית יחידה $f:V\to W$ כך ש- $f(v_i)=w_i$ לכל $1\le i\le n$.

<u>הגדרה</u>: **מטריצה** היא טבלה של איברים בשדה מסוים. אם מספר השורות במטריצה הוא m ומספר העמודות הוא n אומרים שהמטריצה היא מ**סדר** $m\times n$. מסמנים:

$$A=\left(a_{i,j}\right)=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}$$

נסמן את האיבר של A שעומד בשורה i ובטור j ע"י $[A]_{i,j}$.

<u>הגדרה</u>: יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה F ויהיו $\mathfrak{A}=\{v_1,...,v_n\}\subseteq V$ ו- $\mathfrak{B}=\{w_1,...,w_m\}\subseteq W$ בסיסים שלהם. כלומר $\dim_F V=n,\dim_F W=m$. תהי $f:V\to W$ העתקה לינארית. נניח שלכל $1\le j\le n$ מתקיים $f\left(v_j\right)=\sum_{i=1}^{m}a_{i,j}w_i$ כאשר $a_{i,j}\in F$. נתאים להעתקה הזו מטריצה שנסמנה ב- A_f (או ב- $[f]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$) מסדר $m\times n$ כך: $A_f=\left(a_{i,j}\right)$. כלומר בטור ה- j-י של המטריצה נרשום את המקדמים בפיתוח של $f\left(v_j\right)$ לפי הבסיס שבחרנו ל- W.

<u>משפט</u>: יהי $v_1,...,v_n\in V$ בסיס של V ויהי $w_1,...,w_m\in W$ בסיס של W. אזי לכל מטריצה A מסדר $m\times n$ קיימת העתקה לינארית $f:V\to W$ יחידה כך ש- $A_f=A$.

<u>טענה</u>: יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F ממימד n,m בהתאמה. נגדיר $\varphi:\mathrm{Hom}_F\left(V,W\right)\to M_{m,n}\left(F\right)$ באופן הבא: $\varphi(f)=A_f$. אזי φ איזומורפיזם.

<u>מסקנה</u>: $M_{m,n}\left(F\right)$ מרחב וקטורי מעל F.

<u>משפט</u>: $\dim_F M_{m,n}\left(F\right)=m\cdot n$

<u>משפט</u>: יהי U מרחב וקטורי ממימד n. אם $f:U\to U'$ איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים אז $\dim_F U=\dim_F U'$.

<u>מסקנה</u>: $\dim_F \mathrm{Hom}_F\left(V,W\right)=\dim_F V\cdot\dim_F W$

<u>הגדרה</u>: אם $A=\left(a_{i,j}\right)\in M_{m,n}\left(F\right)$ ו- $B=\left(b_{k,i}\right)\in M_{l,m}\left(F\right)$ מגדירים את המכפלה $BA=\left(c_{k,j}\right)\in M_{l,n}\left(F\right)$ כאשר $c_{k,j}=\sum_{i=1}^{m}b_{k,i}a_{i,j}$. נשים לב שמספר העמודות של המטריצה הראשונה צריך להתאים למספר השורות של המטריצה השנייה.

<u>משפט</u>: יהיו יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F ויהיו $f,g\in\mathrm{Hom}\left(V,W\right)$ ו- $c\in F$. אזי:

1. $A_{f+g}=A_f+A_g$
2. $A_{cf}=cA_f$
3. $A_{gf}=A_gA_f$

<u>משפט</u>: כפל מטריצות, כאשר הוא מוגדר, הוא אסוציאטיבי.

<u>טענה</u>: כאשר כפל המטריצות מוגדר,

$$P(Q_1+Q_2)=PQ_1+PQ_2$$
$$(P_1+P_2)Q=P_1Q+P_2Q$$

<u>טענה</u>: יהיו $P\in M_{p,q}(F),Q\in M_{q,r}(F)$ ויהי $a\in F$. אזי $(aP)Q=P(aQ)=a(PQ)$.

<u>הגדרה</u>: יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל F ויהיו $\mathfrak{A}=\{v_1,...,v_n\}\subseteq V,\mathfrak{B}=\{w_1,...,w_m\}\subseteq W$ בסיסים. יהיו $\mathfrak{A}'=\{v_1',...,v_n'\}\subseteq V,\mathfrak{B}'=\{w_1',...,w_m'\}\subseteq W$ זוג בסיסים נוסף. תהי $f\in \mathrm{Hom}_F(V,W)$. נניח ש- $[f]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}=A_f=(a_{i,j})$ המטריצה המתאימה ל- f לפי זוג הבסיסים הראשון ואילו $[f]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}=A_f'=(a_{i,j}')$ המטריצה לפי זוג הבסיסים השני.
ברור ש- $f=Id_W\circ f\circ Id_V$. לכן $A_f'=PA_fQ$ כאשר $P=[Id_W]_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}$ ו- $Q=[Id_V]_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}'}$. P,Q אינן תלויות ב- f אלא רק בבסיסים שבחרנו ולכן הקשר $A_f'=PA_fQ$ נכון לכל העתקה. המטריצות P,Q נקראות **מטריצות מעבר בסיס**.

<u>משפט</u>: אם P מטריצת מעבר בסיס מ- $\mathfrak{A}$ ל- $\mathfrak{A}'$ ו- Q מטריצת מעבר בסיס מ- $\mathfrak{A}'$ ל- $\mathfrak{A}$ אזי $PQ=I=QP$.

<u>משפט</u>: תהי $A\in M_{m,n}(F)$ ותהי $B\in M_{n,m}(F)$ כך ש- $AB=I_m,BA=I_n$. אזי $m=n$.

<u>משפט</u>: אם $f:V\to W$ העתקה לינארית ו- $f(c)=b$ אז $f^{-1}(b)=c+\ker f$

<u>הגדרה</u>: יהי $U\subset V$ תת מרחב. ויהי $v\in V$. הקבוצה $v+U=\{v+u:u\in U\}$ נקראת **ישרייה**. U נקרא **תת המרחב המכוון** של הישרייה.

<u>טענה</u>: $v+U$ הוא תת מרחב של V אמ"מ $v\in U$ ואז $v+U=U$.

<u>טענה</u>: יהיו $U_1,U_2\subset V$ תתי מרחבים ו- $v_1,v_2\in V$ כך ש- $v_1+U_1=v_2+U_2$. אזי $U_1=U_2$.

<u>הגדרה</u>: נאמר ש**המימד של הישרייה** $v+U$ הוא $\dim_F(v+U)=\dim_F U$. בגלל הטענה הקודמת המימד מוגדר היטב.

<u>הגדרה</u>: תהי $A=(a_{i,j})\in M_{m,n}(F)$. נסמן:

השורות של A: $$a_{1*}=\begin{pmatrix}a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\end{pmatrix},\ \vdots,\ a_{m*}=\begin{pmatrix}a_{m,1} & \dots & a_{m,n}\end{pmatrix}$$

העמודות של A: $$a_{*1}=\begin{pmatrix}a_{1,1}\\ \vdots\\ a_{m,1}\end{pmatrix},...,a_{*n}=\begin{pmatrix}a_{1,n}\\ \vdots\\ a_{m,n}\end{pmatrix}$$

<u>משפט</u>: אם $f_A:F^n\to F^m$ מוגדרת ע"י $f_A(c)=Ac$ אז $\mathrm{Im}\, f_A=\mathrm{span}(a_{*1},...,a_{*n})\subset F^m$

<u>הגדרה</u>: **הדרגה של מטריצה** $A\in M_{m,n}(F)$ **לפי העמודות** היא $\mathrm{rank}_c\, A=\dim_F \mathrm{span}(a_{*1},...,a_{*n})$
הדרגה של מטריצה $A\in M_{m,n}(F)$ **לפי השורות** היא $\mathrm{rank}_r\, A=\dim_F \mathrm{span}(a_{1*},...,a_{m*})$

<u>משפט</u>: לכל מטריצה $C\in M_{n,p}(F)$ $\mathrm{rank}_c\, C=\mathrm{rank}_r\, C$

<u>הגדרה</u>: תהי $A\in M_{m,n}(F)$. נגדיר את **הדרגה** שלה ע"י $\mathrm{rank}\, A=\mathrm{rank}_c\, A=\mathrm{rank}_r\, A$.

משפט: למערכת המשוואות $Ax=b$ יש פיתרון אמ"מ $\text{rank } A^* = \text{rank } A$.

הגדרה: שתי מערכות משוואות $Ax=b$ ו- $A'x=b'$ נקראות **שקולות** אם יש להן בדיוק אותם הפיתרונות.

משפט: תהי C מטריצה הפיכה מסדר. אזי המערכת $Ax=b$ שקולה למערכת $(CA)x=Cb$.

הגדרה: מטריצה D נקראת **מדורגת** כאשר צורתה כלהלן:

1. יש בה עמודות סטנדרטיות לפי הסדר שלהן.
2. ניתן להעביר קו מדרגות כאשר כל עמודה סטנדרטית קובעת מדרגה.
3. מתחת לקו המדרגות יש רק אפסים.

משפט: לכל מטריצה $A \in M_{m,n}(F)$ קיימת מטריצה הפיכה $B \in M_m(F)$ כך ש- BA היא מדורגת.

משפט: אם $D_1 = B_1A, D_2 = B_2A$ כאשר B_1, B_2 הפיכות ו- D_1, D_2 מדורגות אז $D_1 = D_2$.

נספח ב – חוג הפולינומים

הגדרת החוג

הגדרה: קבוצה R שעליה מוגדרות שתי פעולות דו-מקומיות, חיבור ($+$) וכפל ($\cdot$), נקראת **חוג** אם:

1. R מקיימת את התכונות הבאות לגבי החיבור:
   1.1. קשירות: לכל $a,b \in R$ $a+b$ הוא איבר המוגדר חד ערכית ב- R.
   1.2. אסוציאטיביות: לכל $a,b,c \in R$ מתקיים $(a+b)+c = a+(b+c)$.
   1.3. קומוטטיביות: לכל $a,b \in R$ מתקיים $a+b=b+a$.
   1.4. קיום איבר ניטרלי: קיים $0 \in R$ המקיים לכל $a \in R$ $0+a=a$.
   1.5. קיום איבר נגדי: לכל $a \in R$ קיים $-a \in R$ כך ש- $(-a)+a=0$.
2. הכפל ב- R מקיים:
   2.1. קשירות: לכל $a,b \in R$ ab הוא איבר של R המוגדר חד ערכית.
   2.2. אסוציאטיביות: לכל $a,b,c \in R$ מתקיים $(ab)c = a(bc)$.
3. מתקיימים שני החוקים הדיסטריביוטיביים: לכל $a,b,c \in R$ מתקיים:
$$a(b+c) = ab+ac$$
$$(a+b)c = ac+bc$$

חוג R שבו הכפל קומוטטיבי, כלומר לכל $a,b \in R$ מתקיים $ab=ba$ נקרא **חוג קומוטטיבי**.
חוג R שקיים בו איבר יחידה 1 המקיים $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ לכל $a \in R$ נקרא **חוג עם יחידה**.

דוגמאות:
1. קבוצת המספרים השלמים היא חוג קומוטטיבי עם יחידה.
2. לכל $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{Z}_n$ חוג קומוטטיבי עם יחידה.
3. לכל $n \in \mathbb{N}$ $n\mathbb{Z}$ חוג קומוטטיבי, אך לא בהכרח עם איבר יחידה, למשל בקבוצת הזוגיים אין איבר יחידה.
4. קבוצת המטריצות הריבועיות $M_n(F)$ מעל שדה F היא חוג עם יחידה שאינו קומוטטיבי עבור $1<n$.

חוג הפולינומים

הגדרה: יהי נתון חוג קומוטטיבי עם יחידה R. נגדיר קבוצה חדשה $R[x]$ אשר תיקרא **חוג הפולינומים** ב- x מעל R באופן הבא: איברי $R[x]$ הם ביטויים $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ כאשר $a_i \in R$ ו- $n \in \mathbb{N}$. $p(x)$ נקרא **פולינום** ב- x מעל R ו- $\{a_i\}$ נקראים **מקדמי הפולינום**. המספר הגדול ביותר m שעבורו $a_m \neq 0$ נקרא **מעלת הפולינום** ומסומן $m = \deg p(x)$. הפולינום שכל מקדמיו הם 0 נקרא **פולינום האפס** ואין מייחסים לו מעלה.

<u>הגדרה</u>: יהיו $p,q\in R[x]$. אם $p=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ ו- $q=\sum_{i=1}^{m}b_ix^i$ ו- $m\le n$ נאמר שהפולינומים **שווים** אם $a_i=b_i$ לכל $0\le i\le m$ ו- $a_i=0$ לכל $m<i\le n$.

<u>הגדרה</u>: **חיבור וכפל פולינומים** נעשה כפי שאנחנו מכירים מבי"ס, רק יש לשים ♥ שאם אנחנו בחוג הכפל לא בהכרח קומוטטיבי ולכן למשל: $(x+y)(x-y)\neq x^2-y^2$.

<u>הערה</u>: קל להראות שתחת הגדרות אלה חוג הפולינומים הוא אכן חוג. כמו כן ברור ש- $\deg(f+g)\le\max\{\deg f,\deg g\}$ ו- $\deg fg=\deg f+\deg g$.

כל שדה הוא בפרט חוג ולכן ניתן לדבר על פולינומים מעל שדות. חוג הפולינומים מעל שדה הוא חוג קומוטטיבי עם יחידה. איבר היחידה של חוג הפולינומים הוא הפולינום $1[x]=1_F$.

<u>טענה</u>: יהיו f,g פולינומים מעל שדה F ונניח כי $f\neq 0$. אזי קיימים פולינומים יחידים r,q מעל F כך ש- $g=qf+r$ ו- $\deg r<\deg f$.

<u>הוכחה</u>:

קיום: אם $\deg g<\deg f$ אזי $g=0\cdot f+g$ וסיימנו.

נניח כעת ש- $\deg f\le\deg g$ ונוכיח את הטענה באינדוקציה שלמה על $\deg g$.

אם $\deg g=0$ אז $g=c_1\in F$. מאחר ש-$f\neq 0$ ו- $\deg f\le\deg g$ נובע ש- $f=c_2\neq 0$. מאחר שמדובר בשדה קיים c_3 כך ש-$c_1=c_2c_3$.[11]

נניח שהטענה נכונה עבור כל הפולינומים מדרגה לכל היותר $n-1$ ונוכיח עבור n. נניח ש- $f(x)=a_mx^m+...+a_1x+a_0$ ו- $g(x)+b_nx^n+...+xb_1+b_0$ כאשר $b_n,a_m\neq 0$ ו- $m\le n$. נגדיר פולינום חדש $g_1=g-\frac{b_n}{a_m}x^{n-m}\cdot f$. ברור ש- $\deg g_1<n$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה קיימים q_1,r_1 כך ש- $g_1=q_1f+r_1$ ו- $\deg r_1<\deg f$. לכן $g=g_1+\frac{b_n}{a_m}x^{n-m}\cdot f=\frac{b_n}{a_m}x^{n-m}\cdot f+q_1f+r_1=\left(\frac{b_n}{a_m}x^{n-m}+q_1\right)+r_1$.

נסמן $q=\frac{b_n}{a_m}x^{n-m}+q_1$ ו- $r=r_1$ ואז $g=qf+r$ ו- $\deg r<\deg f$.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$.

יחידות: נניח שקיימות שתי הצגות שונות $q_1f+r_1=g=q_2f+r_2$. אזי $f(q_1-q_2)=r_1-r_2$. אם $q_1\neq q_2$ נקבל שהדרגה בצד שמאל שווה לדרגה בצד ימין וזה לא ייתכן כי $\deg r<\deg f$. ☺

<u>הגדרה</u>: בסימנים לעיל q נקרא **מנה** ו- r נקרא **שארית** והתהליך למציאתם נקרא **חילוק פולינומים**.

<u>הגדרה</u>: יהיו f,g פולינומים מעל שדה F. נאמר ש- f **מחלק** את g ונסמן $f\mid g$ אם קיים פולינום h כך ש- $g=fh$.

<u>הגדרה</u>: פולינום d מעל F נקרא **המחלק המשותף המקסימלי** (מ.מ.מ) של f ו- g אם $d\mid f$ וגם $d\mid g$ ולכל e כך ש- $e\mid f$ ו- $e\mid g$ מתקיים $e\mid d$.

---

[11] באינדוקציה שלמה אין צורך בבסיס אינדוקציה, אבל אנחנו עושים אותו מטעמים דידקטיים.

<u>דוגמה</u>:

נחלק את הפולינום x^4+x-1 בפולינום $x-1$:

$$
\begin{array}{l}
x^3+x^2+x+2 \\
\overline{x^4+x-1}\,|\,x-1 \\
\underline{x^4-x^3} \\
\quad x^3+x \\
\quad \underline{x^3-x^2} \\
\qquad x^2+x-1 \\
\qquad \underline{x^2-x} \\
\qquad\quad 2x-1 \\
\qquad\quad \underline{2x-2} \\
\qquad\qquad 1
\end{array}
$$

לכן $x^4+x-1=(x-1)(x^3+x^2+x+2)+1$ ואכן $\deg 1<\deg(x-1)$. במקרה זה מאחר ש-$1\neq 0$ $f\nmid g$.

<u>הגדרה</u>: שדה F נקרא **סגור אלגברית** אם לכל פולינום שאינו קבוע עם מקדמים ב-F יש שורשים ב-F. כלומר אם $p(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ ו-$\deg p(x)>1$ אז קיים $\alpha\in F$ כך ש-$p(\alpha)=0$.

<u>הגדרה</u>: **פולינום מתוקן** מדרגה n הוא פולינום שבו $a_n=1$. **פולינום לינארי** הוא פולינום מתוקן ממעלה 1.

<u>טענה</u>: יהיו $f(x),g(x)\in F[x]$ מתוקנים כך ש-$f(x)|g(x)$ וכן $g(x)|f(x)$. אזי $f(x)=g(x)$.

<u>הוכחה</u>: מהנתונים קיימים $q_1(x),q_2(x)$ כך ש-$f(x)=q_1(x)g(x)$ ו-$g(x)=q_2(x)f(x)$. אזי $f(x)=q_1(x)q_2(x)f(x)$. לכן $\deg f(x)=\deg(q_1(x)q_2(x))+\deg f(x)$. ומכאן ש-$\deg(q_1(x)q_2(x))=0$. אבל מעלת פולינומים היא מספר אי שלילי ולכן זה ייתכן רק אם $\deg q_1(x)=0=\deg q_2(x)$. כלומר $q_1(x)\equiv c_1\in F$ ו-$q_2(x)\equiv c_2\in F$. אז $f(x)=c_1c_2f(x)$. אבל $f(x)=q_1(x)g(x)$ פולינום מתוקן וגם $g(x)$ פולינום מתוקן, ולכן $c_1=1$. לכן $f(x)=g(x)$. ☺

<u>טענה</u>: יהי F שדה סגור אלגברית. אזי לכל פולינום ממעלה n מעל F יש n שורשים, כלומר הוא מתחלק ל-n גורמים לינאריים: $p(x)=a_0(x-x_1)...(x-x_n)$ כאשר $x_1,...,x_n\in F$.

<u>הוכחה</u>: לפי ההגדרה יש לפחות שורש אוחד. נראה באינדוקציה על n שיש n שורשים.

עבור $n=1$ $p(x)=a_1x+a_0=a_1\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right)$.

נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$ ונוכיח עבור n. יהי $p(x)$ פולינום מדרגה $2\leq\deg p(x)$. מכיוון ש-F סגור אלגברית קיים לפחות שורש אחד x_1 כך ש-$p(x_1)=0$. נחלק את $p(x)$ חילוק עם שארית ב-$x-x_1$: $p(x)=(x-1)q(x)+r(x)$ כאשר $\deg r(x)<\deg(x-x_1)=1$. לכן $r(x)=c\in F$. לכן $0=p(x_1)=(x_1-x_1)q(x)+c=c$. כלומר $p(x)=(x-1)q(x)$. לכן $\deg q(x)=n-1$ וניתן להחיל עליו את הנחת האינדוקציה: קיימים $a_0,x_2,...,x_n\in F$ כך ש-$q(x)=a_0(x-x_2)...(x-x_n)$. מכאן ש-$p(x)=(x-x_1)q(x)=a_0(x-x_1)...(x-x_n)$.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$. ☺

<u>מסקנה</u>: יהי $f\in F[x]$. אזי $\alpha\in f$ שורש של $f(x)$ אמ"מ $x-\alpha$ מחלק את $f(x)$.

<u>המשפט היסודי של האלגברה</u>: שדה המרוכבים $\mathbb{C}$ הוא שדה סגור אלגברית.

<u>הערה</u>: יש עוד שדות סגורים אלגברית, אפילו עם מציין סופי. נלמד על זה במבנים אלגבריים. דוגמה טריוויאלית היא $\mathbb{Z}_2$ שהרי שם $1=-1$.

מטריצות מעל חוגים

כזכור הגדרנו את המטריצות $M_{m,n}(F)$ כטבלאות של איברים השייכים לשדה F. באותו אופן ניתן לדבר על מטריצות מעל חוגים $M_{m,n}(R)$ ומאחר שמוגדרות בחוגים פעולות חיבור וכפל ניתן גם לדבר על דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מעל חוג ולא מעל שדה. אזי הדטרמיננטה תהיה איבר של החוג. אנחנו נתרכז בחוגים קומוטטיביים עם יחידה.

רוב התכונות של דטרמיננטות של מטריצות מעל חוגים קומוטטיביים עם יחידה זהות לתכונות של דטרמיננטות של מטריצות מעל שדות:

1. כאמור, דטרמיננטה של מטריצה מעל חוג מוגדרת היטב משום שמוגדרות פעולות חיבור וכפל. נגדיר את הדטרמיננטה באותו אופן. עבור $A=\left(a_{i,j}\right)\in M_n(R)$ נגדיר
$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$
2. פונקצית הדטרמיננטה מולטילינארית כפונקציה על העמודות או על השורות:
$\det\left(v_1,...,av_i+bv_i',...,v_n\right)=a\det\left(v_1,...,v_i,...,v_n\right)+b\det\left(v_1,...,v_i',...,v_n\right)$.
3. אם $v_i=0$ אז $\det\left(v_1,...,v_i,...,v_n\right)=0$.
4. אם $v_i=v_j$ לאילו $i\neq j$ אז $\det\left(v_1,...,v_i,...,v_j,...,v_n\right)=0$.
5. השפעה של פעולות אלמנטריות על הדטרמיננטה:
   a. החלפת שורות מכפילה את הדטרמיננטה ב- -1
   b. כפל שורה בסקלר מכפילה את הדטרמיננטה באותו סקלר
   c. הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת לא משנה את הדטרמיננטה.
6. לכל $A\in M_n(R)$ מתקיים $\det A=\det A^t$.
7. משפט המכפלה: לכל $A,B\in M_n(R)$ מתקיים $\det AB=\det A\det B$.
8. נוסחת הפיתוח לפי השורה ה- i: $\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}m_{i,j}$.
9. $A\,\mathrm{Adj}A=|A|I=(\mathrm{Adj}A)A$ ומכאן ש- $A\in M_n(R)$ הפיכה משני הצדדים אמ"מ $|A|$ הפיך ב- R.

נשים לב שיש תכונות שנכונות בשדות ולא בחוגים. למשל מעל שדות בהיתנן העתקה לינארית $T:F^n\to F^n$ היא חח"ע אמ"מ היא על. בחוגים זה לא נכון. למשל נסתכל על $R=\mathbb{Z}$ והעתקה שמוגדרת ע"י $T(z)=2z$. T היא חח"ע אך אינה על.

כמו כן, בשדות מספיק ש- c יהיה שונה מאפס כדי להיות הפיך. ולכן A הפיכה אמ"מ $\det A\neq 0$. אך בחוגים לא נכון שכל איבר ששונה מאפס הוא הפיך. למשל בשלמים, האיברים ההפיכים היחידים הם ± 1.

<u>דוגמה</u>:
נחשב את הדטרמיננטה של מטריצת Vandermonde. נטען ש-

$$\det V_n = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j>i}\left(x_j - x_i\right).$$

נוכיח את הטענה באינדוקציה על n. עבור $n=2$ ברור שהטענה נכונה: $\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}\right| = x_2 - x_1$.

נניח שהטענה נכונה ל-$n-1$ ונוכיח עבור n. נסתכל על V_n ונחסיר מכל השורות את השורה הראשונה. פעולה זו לא משפיעה על הדטרמיננטה ולכן

$$\det V_n = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

ידועה הזהות: $a^k - b^k = (a-b)\sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-j-1}$. נשתמש בה כדי להוציא גורם משותף מכל השורות:

$$\det V_n = \prod_{j>1}\left(x_j - x_1\right)\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_1^2 + x_2 x_1 + x_2^2 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-2} x_2^j x_1^{n-j-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 1 & x_n + x_1 & x_1^2 + x_n x_1 + x_n^2 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-2} x_n^j x_1^{n-j-2} \end{pmatrix}$$

כעת לכל טור $1 < j \le n$ נחסיר ממנו את מכפלת הטור $j-1$ ב- x_1 ומאחר שפעולה זו לא משפיעה על הדטרמיננטה נקבל:

$$\det V_n = \prod_{j>1}\left(x_j - x_1\right)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

נפתח את הדטרמיננטה לפי השורה הראשונה ונקבל

$$\det V_n = \prod_{j>1}\left(x_j - x_1\right)\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix} = \prod_{j>1}\left(x_j - x_1\right)\det v_{n-1} \overset{IH}{=} \prod_{j>1}\left(x_j - x_1\right)\prod_{j>i\ge 2}\left(x_j - x_i\right)$$

כלומר $\det V_n = \prod_{j>i}\left(x_j - x_1\right)$.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $2 \le n \in \mathbb{N}$. ☺