

## אלגברה לינארית 2 – סיכומי הרצאות של ד"ר אלכס אייזנברג

### ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצות והעתקות לינאריות

**הגדרה:** תהי  $A \in Mn(F)$  אם  $v \in F^n$  שונה מאפס וקיים סקאלר  $\lambda \in F$  כך ש:  $Av = \lambda v$  אנו אומרים ש  $\lambda$  הוא ערך עצמי (אופייני) של  $A$  ו  $v$  וקטור עצמי השייך ל  $\lambda$

**טענה:** תהי  $A \in Mn(F)$  אם  $v$  וקטור עצמי של  $A$  השייך ל  $\lambda$  אזי  $\alpha v$  גם וקטור עצמי של  $A$  השייך ל  $\lambda$ .

**הוכחה:** נתון  $Av = \lambda v$  לכן גם  $\alpha v \neq 0$  וגם  $A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha \lambda v$

**טענה:** תהי  $A \in Mn(F)$ ,  $\lambda$  הוא ערך עצמי של  $A$  אמ"מ  $\det(\lambda I - A) = 0$

**הוכחה:**

א. נסמן  $B = (\lambda I - A)$  נניח ש  $\lambda$  הוא ערך עצמי של  $A$  אז קיים  $v \in F^n$  שונה מאפס כך ש  $Av = \lambda v$  ולכן  $Bv = (\lambda I - A)v = \lambda v - Av = 0$  כלומר  $B$  סינגולרית ולכן  $\det B = 0$ .  
 ב. נניח  $\det B = 0$  אזי  $B$  סינגולרית דהיינו קיים  $v \in F^n$  כך ש  $Bv = 0$  אבל  $B = (\lambda I - A)$  ולכן  $\lambda v = Av$  ולכן  $\lambda I v = Av \Rightarrow (\lambda I - A)v = 0$  כנדרש.

**הגדרה:** תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית כאשר  $V$  מ"ו מעל שדה  $F$ . אם עבור  $v \in V$  השונה מ-0, קיים סקאלר  $\lambda \in F$  כך ש  $T(v) = \lambda(v)$  אנו אומרים ש  $\lambda$  הוא ע"ע של ההעתקה ו  $v$  הוא וקטור עצמי של  $T$  השייך ל  $\lambda$ .  
**הערה:** תהי  $A \in Mn(F)$  תמיד ניתן להגדיר העתקה לינארית  $T_A: F^n \rightarrow F^n$  על ידי הנוסחה הבאה  $T_A(v) = Av$  לכל  $v \in F^n$  ואזי כל ערך עצמי וכל וקטור עצמי של  $A$  הם בעצם ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

**משפט:** תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית כאשר  $V$  הוא מ"ו ממימד סופי מעל  $F$ . יהי  $\Gamma = (V_1, V_2, \dots, V_n)$  בסיס של  $V$  המורכב כולו מוקטורים עצמיים של  $T$  (ז"א  $T(V_i) = \lambda_i V_i$ ) אזי המטריצה המתאימה להעתקה  $T$  ביחס לבסיס זה היא אלכסונית, יתירה מזאת היא בעלת הצורה:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**הוכחה:** אם  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  מטריצה של  $T$  ביחס לבסיס  $\Gamma$  אזי לפי הגדרה:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \quad \text{לכל } 1 \leq j \leq n \text{ . לכן:}$$

$$a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \dots + a_{(j-1)j} v_{j-1} + a_{jj} v_j + a_{(j+1)j} v_{j+1} + \dots + a_{nj} v_n = \lambda_j v_j$$

נעביר אגפים :

$$a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{(j-1)j}v_{j-1} + (a_{jj} - \lambda_j)v_j + a_{(j+1)j}v_{j+1} + \dots + a_{nj}v_n = 0$$

לכן כל המקדמים הם אפסים כי  $\Gamma$  בסיס ולכן כאשר  $i \neq j$  אזי  $a_{ij} = 0$  וכאשר  $i = j$  אזי  $a_{ij} = \lambda_j$  כנדרש.

**למה :** יהי  $V$  מרחב לינארי  $T: V \rightarrow V$  ו  $V_1, V_2, \dots, V_k$  וקטורים עצמיים של  $T$ , (ז"א  $(T(V_i) = \lambda_i V_i)$  לכל  $1 \leq i \leq k$  ו  $\lambda_i$  שונים זה מזה לכל  $1 \leq i \leq k$  אזי  $V_1, V_2, \dots, V_k$  בלתי תלויים לינארית).

**הוכחה :** נוכיח באינדוקציה לפי  $k \geq 1$

אם  $k=1$  אזי כל הקבוצה היא וקטור בודד שונה מאפס וברור שקבוצה זו הנה בת"ל. נניח נכונות הטענה עבור  $k$  ונוכיח עבור  $k+1$

תהי  $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$  סדרת וקטורים עצמיים של  $T$  כך ש  $T(v_i) = \lambda_i v_i$  כאשר  $\lambda_i$  שונים זה מזה לכל  $1 \leq i \leq k+1$ .

לפי הנחת האינדוקציה  $v_1, v_2, \dots, v_k$  בת"ל. נרשום את המשוואה.

$$(1) t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k + t_{k+1} v_{k+1} = 0$$

ונוכיח שהיא מתקיימת רק כאשר כל המקדמים הם אפסים.

אם (1) מתקיימת אז

$$(2) 0 = T \left( \sum_{i=1}^{k+1} t_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{k+1} t_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{k+1} t_i \lambda_i v_i = t_1 \lambda_1 v_1 + \dots + t_k \lambda_k v_k + t_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1}$$

נכפיל את שני האגפים של (1) ב  $\lambda_{k+1}$  ונקבל :

$$(3) \lambda_{k+1} t_1 v_1 + \lambda_{k+1} t_2 v_2 + \dots + \lambda_{k+1} t_k v_k + \lambda_{k+1} t_{k+1} v_{k+1} = 0$$

(2) ו(3) נקבל :

$$(4) t_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + t_2 (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) v_2 + \dots + t_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k = 0$$

כלומר  $t_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) v_i = 0$  עבור כל  $1 \leq i \leq k$  ולכן בהכרח כל  $t_i = 0$  נציב את זה ב(1)

ונקבל  $t_{k+1} v_{k+1} = 0$  ולכן מכיוון ש  $v_{k+1} \neq 0$  כי הוא וקטור עצמי הרי ש  $t_{k+1} = 0$  ולכן

בלתי תלויים לינארית כנדרש.  $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$

**תוצאה :** נניח ש  $\dim V = n$  ו  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית.

א. אזי ל  $T$  יש לכל היותר  $n$  ערכים עצמיים השונים זה מזה.

ב. אם ל  $T$  יש  $n$  ערכים עצמיים השונים זה מזה אזי קיים בסיס  $\Gamma$  של  $V$

המורכב כולו מוקטורים עצמיים של  $T$ . יתירה מזאת המטריצה של  $T$  ביחס לבסיס זה היא אלכסונית.

**הוכחה :**

א. אם ע"ע הם שונים זה מזה אזי  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ו"ע המתאימים הם בת"ל לפי הלמה,

ובמרחב ממימד  $n$  ייתכנו לכל היותר  $n$  וקטורים בת"ל

ב. ולכן אם יש  $n$  וקטורים כאלו אזי הם בת"ל ולכן הם בסיס של  $V$ .

**תזכורת:** יהיה  $\Phi = (V_1, V_2, \dots, V_n)$  בסיס של  $V$  ויהי  $v \in V$  אזי  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$

נרשום  $[v]_\Phi = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in F^n$  וקטור זה נקרא וקטור המקדמים של  $V$  ביחס לבסיס  $\Phi$ .

תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית. ותהי  $A$  מטריצה של  $T$  ביחס לבסיס  $\Phi$  אזי  $A[v]_\Phi = [T(v)]_\Phi$

**טענה:**  $\lambda \in F$  הוא עי"ע של  $T$  אם ורק אם הוא עי"ע של  $A$ , יתירה מזאת  $v \in V$  הוא וקטור עצמי של  $T$  השייך ל  $\lambda$  אם ורק אם  $[v]_\Phi \in F^n$  הוא וקטור עצמי של  $A$  השייך ל  $\lambda$ .

**הוכחה:**  $\Leftarrow$  אם  $T(v) = \lambda(v)$  אזי  $v \neq 0$  וגם  $[v]_\Phi \neq 0$  לכן  $A[v]_\Phi = [T(v)]_\Phi = [\lambda v]_\Phi = \lambda[v]_\Phi$  כלומר  $\lambda$  עי"ע של  $A$  וגם  $[v]_\Phi$  הוא וקטור עצמי של  $A$ .

**תזכורת:** תהיינה  $A, B \in M_n(F)$  אזי אומרים שהם דומות זו לזו אם קיימת מטריצה הפיכה  $P$  כך ש  $A = P^{-1}BP$ . המשמעות היא שהן מייצגות את אותה ההעתקה בבסיסים שונים.

**טענה:** כל עי"ע של  $A$  הוא עי"ע של  $B$  ולהפך.

**הוכחה:** נניח ש  $\lambda \in F$  עי"ע של  $A$ , ז"א קיים  $v \neq 0$  כך ש  $Av = \lambda v$  אזי  $P^{-1}BPv = \lambda v$ , נכפיל את שני האגפים ב  $P$  משמאל ונקבל:  $BPv = \lambda Pv$  ז"א  $B(Pv) = \lambda(Pv)$ . וקטור  $Pv$  שונה מאפס כי  $P$  הפיכה ולכן  $Pv$  וקטור עצמי של  $B$  ו  $\lambda$  עי"ע של  $B$

**תזכורת כפל מטריצות:**  $A_{n \times n} B_{n \times n} = C_{n \times n}$  וכל איבר זהה ל:  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

נרשום את  $B$  לפי עמודות  $B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)$ ,  $\bar{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$  ואז נרשום את נוסחת הכפל  $A \cdot \bar{b}_j = \bar{c}_j$  כאשר  $C_j$  היא העמודה ה  $j$  של  $C$ .

**מקרה פרטי:**  $AI = A$  אבל  $I = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$  לכן  $A \cdot \bar{e}_j = \bar{a}_j$  ואם  $A$  הפיכה אזי  $\bar{e}_j = A^{-1} \bar{a}_j$

**טענה:** תהי  $A \in M_n(F)$  ויהי  $\Gamma = (V_1, V_2, \dots, V_n)$  בסיס של  $F^n$  המורכב כולו

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ מוקטורים עצמיים של } A \text{ (ז"א } A(V_i) = \lambda_i V_i \text{)} \text{ אזי}$$

כאשר  $P = (V_1, V_2, \dots, V_n)$  כאשר  $V_i$  עמודת מקדמים של איברי הבסיס  $\Gamma$ .

**הוכחה:** העמודות של  $AP$  הם בעצם  $A \cdot \overline{v_j}$  לכל  $1 \leq j \leq n$  ז"א הן  $\lambda_j v_j$  כלומר  
 $AP = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n)$  ולכן  $P^{-1}AP = (P^{-1}(\lambda_1 v_1), P^{-1}(\lambda_2 v_2), \dots, P^{-1}(\lambda_n v_n))$  ז"א  
 העמודות של  $P^{-1}AP$  הם מן הצורה  $P^{-1}(\lambda_j v_j)$  לכל  $1 \leq j \leq n$  אבל  $P^{-1}v_j = e_j$  כי  $v_j$   
 הנה עמודה של  $P$  ולכן נקבל  $P^{-1}(\lambda_j v_j) = \lambda_j e_j$  ולכן המטריצה אלכסונית.

**הגדרה:** אנו אומרים שמטריצה  $A$  מן הצורה  $n \times n$  ניתנת ללכסון אם קיימת  
 מטריצה הפיכה  $P$  ומטריצה אלכסונית  $B$  כך ש  $P^{-1}AP = B$

**טענה:**  $A \in M_n(F)$  ניתנת ללכסון אמ"מ קיים בסיס  $\Gamma = (V_1, V_2, \dots, V_n)$  של  
 $F^n$  המורכב כולו מוקטורים עצמיים של  $A$ . יתירה מזאת, אם קיים בסיס כזה אז

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ כאשר } A(V_i) = \lambda_i V_i \text{ לכל } 1 \leq i \leq n. \text{ ו } P = (V_1, V_2, \dots, V_n)$$

## הפולינום האופייני

**הגדרה:**  $f(t) = |tI - A|$  נקרא הפולינום האופייני של מטריצה  $A$ .

**תזכורת פולינומים:**

ביטוי פורמלי  $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$  נקרא פולינום מעל שדה  $F$  אם  $a_i \in F$  לכל  $1 \leq i \leq n$ .

מספר  $m$  הגדול ביותר עבורו  $a_m \neq 0$  נקרא המעלה של פולינום  $f$ .  
אם כל המקדמים של הפולינום הנם אפסים הוא נקרא פולינום האפס, כאן הדרגה אינה מוגדרת.

אם  $f = a_0 \neq 0$  ניתן לזהות עם הסקלר  $\deg f = 0, a_0 \in F$

אם  $f = a_0 + a_1t$  ביטוי לינארי שהוא פולינום ממעלה 1.

**עובדה 1:** אם  $f, g$  אינם פולינומי אפס אז  $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$

**עובדה 2:** אם  $\deg f = n, \deg g = m, m < n$  אזי:

$$f(t) + g(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_m + b_m)t^m + a_{m+1}t^{m+1} + \dots + a_nt^n$$

**תזכורת דטרמיננטות:**

$S_n$  - קבוצת כל התמורות של  $\{1 \dots n\}$  כלומר אם  $\sigma \in S_n$  אזי היא

$$\text{sign } \sigma = \begin{cases} 1 - \text{even } \sigma \\ -1 - \text{odd } \sigma \end{cases} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

אם  $A \in M_n(F)$  אזי  $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$

**משפט:** תהי  $A \in M_n(F)$  אזי  $f(t) = |tI - A| = \sum_{i=0}^n a_i t^i$  כאשר  $a_i \in F$  לכל  $1 \leq i \leq n$ ,

ומתקיים:  $a_0 = (-1)^n \det A, a_{n-1} = -\text{tr} A, a_n = 1$  כאשר  $\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

**תכונות trace:**  $\text{tr}(A+B) = \text{tr} A + \text{tr} B; \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

$$tI - A = \begin{pmatrix} t - a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & t - a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{הוכחה:}$$

$$\begin{aligned} i \neq j &\Rightarrow f_{ij}(t) = -a_{ij} \\ i = j &\Rightarrow f_{ij}(t) = -a_{ij} + t \end{aligned} \quad \text{כאשר}$$

זאת אומרת  $f_A(t) = \det(tI - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) f_{1\sigma(1)}(t) \dots f_{n\sigma(n)}(t)$

נסמן:  $g_\sigma(t) = \text{sign}(\sigma) f_{1\sigma(1)}(t) \dots f_{n\sigma(n)}(t)$

$g_\sigma(t)$  פולינום עם  $\deg \leq n$  או פולינום האפס ולכן גם סכום הפולינומים ממעלה

קטנה או שווה ל- $n$

פולינום  $g_\sigma(t)$  הוא פולינום ממעלה  $n$  אם ורק אם כל הפולינומים  $f_{i\sigma(i)}(t)$  הם ממעלה אחת כלומר  $i = \sigma(i)$  אחרת הוא ממעלה אפס או פולינום האפס. ז"א פולינום  $g_\sigma(t)$  הוא ממעלה  $n$  אם ורק אם  $\sigma = id$ . לא קיימת  $\sigma \in S_n$  כך ש  $g_\sigma(t)$  הוא ממעלה  $n-1$  מכיוון שתמיד יהיה מספר זוגי של החלפות מקום וע"מ להגיע ל  $n-1$  צריך שרק איבר אחד לא ישלח לעצמו ואין תמורה כזו.

$$f_A(t) = g_{\sigma id}(t) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq id}} g_\sigma(t) \leftarrow \deg(g_\sigma(t)) \leq n-2$$

מסקנה: כלומר  $\deg f_A(t) = n$

$$g_{\sigma id} = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1} + c_n t^n \quad \text{נסמן}$$

$$f_A(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-2} t^{n-2} + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n \quad \text{אזי}$$

$$a_n = c_n; a_{n-1} = c_{n-1} \quad \text{כאשר}$$

כעת:

$$g_{\sigma id} = f_{11}(t) \cdot f_{22}(t) \cdots f_{nn}(t) = (t - a_{11})(t - a_{22}) \cdots (t - a_{nn}) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{n-1} t^{n-1} + c_n t^n$$

ברור מדוע  $c_n = 1$  אבל מדוע  $c_{n-1} = -trA$ ?

טענת עזר: אם  $(t - \alpha_1)(t - \alpha_2) \cdots (t - \alpha_n) = d_0 + d_1 t + \dots + d_{n-1} t^{n-1} + d_n t^n$  אזי

$$d_{n-1} = -\sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{(להוכיח באינדוקציה על n)}$$

וזהו בדיוק המקדם של  $c_{n-1}$  ולכן  $c_{n-1} = -trA$

נותר להוכיח כי  $a_0 = (-1)^n \det A$ :

$$f_A(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-2} t^{n-2} + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n$$

$$a_0 = f_A(0) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) f_{1\sigma(1)}(0) \cdots f_{n\sigma(n)}(0)$$

אבל ברור שעבור  $t=0$  כל פולינום קטן נראה  $f_{i\sigma(i)} = -a_{i\sigma(i)}$

ולכן נקבל

$$a_0 = f_A(0) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) (-1)^n f_{1\sigma(1)}(0) \cdots f_{n\sigma(n)}(0) = (-1)^n \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) f_{1\sigma(1)}(0) \cdots f_{n\sigma(n)}(0) = (-1)^n \det A$$

טענה: אם  $A$  דומה ל  $B$  אז  $f_A(t) = f_B(t)$

הוכחה: אם  $A$  דומה ל  $B$  אזי קיימת מטריצה  $P$  הפיכה כך ש  $B = P^{-1}AP$  ולכן

$$P^{-1}(tI - A)P = P^{-1}tIP - P^{-1}AP = tI - B$$

$$f_B(t) = \det(tI - B) = \det(P^{-1}(tI - A)P) = \det P^{-1} \det(tI - A) \det P = \frac{1}{\det P} f_A(t) \det P = f_A(t)$$

תזכורת:

1. אם  $f$  פולינום ממעלה  $n$  כך ש  $a_n = 1$  אנו אומרים ש  $f$  הוא פולינום מתוקן.
2. אם  $\alpha \in F$  מקיים  $f(\alpha) = 0$  אנו אומרים ש  $\alpha$  הוא שורש של  $f$ .
3. אם  $f$  פולינום ממעלה  $n$  אז יש לו לכל היותר  $n$  שורשים.
4. יהיו  $f, g$  שני פולינומים שאינם פולינומי האפס אזי קיימים שני פולינומים  $r(t), d(t)$  כך ש  $f(t) = g(t) \cdot d(t) + r(t)$  או  $\deg r(t) < \deg g(t)$  או פולינום האפס.

**תוצאה:** לכל  $\alpha \in F$  קיים  $u(t)$  כך ש  $f(t) = (t - \alpha)u(t) + f(\alpha)$   
**הוכחה:** כאן  $g(t) = t - \alpha$  לכן  $r(t) = a_0 \in F$  ו"א  $f(t) = (t - \alpha)u(t) + a_0$  נציב  $t = \alpha$  ונקבל  $f(\alpha) = a_0$  כנדרש.

**תוצאה 2:**  $f(t)$  מתחלק בפולינום  $g(t) = t - \alpha$  אמ"מ  $\alpha$  שורש של  $f$ .  
**המשפט היסודי של האלגברה:** אם  $f$  פולינום מעל  $C$  כך ש  $\deg f \geq 1$  אזי קיים  $\alpha \in C$  אחד לפחות שהוא שורש של  $f$ .

**תזכורת:** למדנו טענה  $\det(\lambda I - A) = 0$  אמ"מ  $\lambda$  הוא עי"ע של  $A$ .

**מסקנה:**  $\lambda \in F$  הוא עי"ע של  $A$  אמ"מ  $\lambda$  שורש של  $f_A(t)$ .

**הוכחה:** נובעת מכך ש  $f_A(t) = \det(tI - A)$  וכשנציב את  $\lambda$  נקבל את המשפט.

## הפולינום המינימלי

יהי  $f$  פולינום  $f(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i$ ;  $a_i \in F$ ;  $0 \leq i \leq k$  ותהי  $B \in M_n(F)$

$$f(B) = \sum_{i=0}^k a_i B^i = a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_k B^k \quad \text{נגדיר}$$

ברור כי  $f(B) \in M_n(F)$

**הגדרה:** אם  $f(B) = 0$  אנו אומרים ש  $B$  מאפסת את  $f$ .

**טענה:** תהי  $B \in M_n(F)$  אזי קיים פולינום מעל שדה  $F$  שאינו פולינום האפס

המתאפס ע"י מטריצה  $B$ .

**הוכחה:**  $M_n(F)$  הוא מרחב לינארי מעל שדה  $f$  יתירה מזאת  $\dim M_n(F) = n^2$  נסמן

$k = n^2$  ונתבונן בסדרת מטריצות  $I, B, B^2, \dots, B^k$  בסדרה זו יש  $k+1$  מטריצות דהיינו

הן תלויות לינארית ז"א קיימים מקדמים  $a_0, a_1, \dots, a_k \in F$  לא כולם אפס כך ש

$$a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_k B^k = 0$$

נגדיר פולינום  $f(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i$  אזי הנוסחה האחרונה מקבלת את הצורה שבה  $f(B) = 0$

אבל  $f$  איננו פולינום האפס.

**הגדרה:** הפולינום המתוקן ממעלה מינימלית המתאפס ע"י מטריצה  $A$  נקרא

הפולינום המינימלי של  $A$ .

**טענה:** הפולינום המינימלי הוא יחיד.

**הוכחה:** נניח שלמטריצה  $B$  יש שני פולינומים מינימליים  $f, g$  השונים זה מזה. ברור

ש  $k = \deg f = \deg g$  אזי:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{k-1} t^{k-1} + t^k$$

$$g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_{k-1} t^{k-1} + t^k$$

נתבונן ב  $r(t) = f(t) - g(t)$ , לפי הנחה  $r(t)$  איננו פולינום האפס הוא פולינום ממעלה

$$r(t) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)t + (a_2 - b_2)t^2 + \dots + (a_{k-1} - b_{k-1})t^{k-1} : m \leq k-1$$

$$r(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{m-1} t^{m-1} + c_m t^m : \text{כמו כן נרשום} : r(B) = f(B) - g(B) = 0$$

כאשר  $m \leq k-1; c_m \neq 0$ .

$$\text{ונקבל } r_1(t) = c_m \left( \frac{c_0}{c_m} + \frac{c_1}{c_m} t + \frac{c_2}{c_m} t^2 + \dots + \frac{c_{m-1}}{c_m} t^{m-1} + t^m \right) = c_m r_1(t)$$

$r_1(B) = 0$  בסתירה למינימליות של  $f, g$  ולכן  $f, g$  לא יכולים להיות שונים זה מזה.

## מעבר בסיסים

נניח כי  $W, V$  שני מרחבים לינאריים מעל  $F$   $T: V \rightarrow W$  העתקה לינארית. יהי  $\Gamma, \Gamma'$  שני בסיסים של  $V$  ו  $\Phi, \Phi'$  בסיסים של  $W$ . סימנו  $A = [T]_{\Phi}^{\Gamma}$  בתור מטריצת ההעתקה ביחס לבסיסים  $\Phi, \Gamma$

$I_v: V \rightarrow V$  כך ש  $I_v(v) = v$  לכל  $v \in V$  נקראת העתקת הזהות ב  $V$ . נניח ש  $P$  מטריצת המעבר מ  $\Gamma$  ל  $\Gamma'$  אזי  $[I_v]_{\Gamma'}^{\Gamma} = P$

**טענה:** בסימונים הקודמים:  $[T]_{\Phi'}^{\Gamma'} = [Iw]_{\Phi'}^{\Phi} [T]_{\Phi}^{\Gamma} [Iv]_{\Gamma'}^{\Gamma}$

נסמן:  $A = [T]_{\Phi}^{\Gamma}$  המטריצה של  $T$  ביחס ל  $\Phi, \Gamma$

$B = [T]_{\Phi'}^{\Gamma'}$  המטריצה של  $T$  ביחס ל  $\Phi', \Gamma'$

$P$  – מטריצת המעבר מ  $\Gamma$  ל  $\Gamma'$  - מטריצה הפיכה

$Q$  - מטריצת המעבר מ  $\Phi$  ל  $\Phi'$  - מטריצה הפיכה

ואז הנוסחה תראה כך  $B = QAP$  (כאן  $A$  ו  $B$  נקראות שקולות ולא שקולות שורה).

מקרה פרטי:  $\Gamma' = \Phi'; \Gamma = \Phi; v = w$  ואז מקבלים:  $[T]_{\Gamma'}^{\Gamma'} = [Iv]_{\Gamma'}^{\Gamma} [T]_{\Gamma}^{\Gamma} [Iv]_{\Gamma'}^{\Gamma}$

$A = [T]_{\Gamma}^{\Gamma}$  המטריצה של  $T$  ביחס ל  $\Gamma$

$B = [T]_{\Gamma'}^{\Gamma'}$  המטריצה של  $T$  ביחס ל  $\Gamma'$

ואז נקבל את הנוסחה  $B = P^{-1}AP$  ואז  $A$  ו  $B$  נקראות דומות.

## פולינומים שמקדמיהם מטריצות

**הגדרה:** ביטוי מן הצורה  $f(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_k t^k$ ;  $A_i \in M_n(f)$ ;  $0 \leq i \leq k$  הוא פולינום שמקדמיו מטריצות.

**סימון:** קבוצת כל הפולינומים מסוג זה יסומנו  $M_n(f)[t]$ .

**הערה:** אם  $f(t)u(t) = g(t)$  בהנחה ש  $t$  סקלאר בכפל פורמלי של פולינומים אין זה אומר ש  $f(B)u(B) = g(B)$

**דוגמה:**  $f(t) = tI - A = -A + tI \in M_n(f)[t]$

ומספיק שנבחר  $f(t)f(t) = (tI - A)(tI - A) = t^2 I - tA - At + A^2 = t^2 I - 2tA + A^2 = g(t)$  מטריצה  $B$  כך ש  $AB \neq BA$  ונקבל  $B^2 I - BA - AB + A^2 \neq B^2 I - 2BA + A^2$  כפי שרצינו להדגים.

**טענה:** יהי  $u(t) = c_0 + tc_1 + \dots + t^m c_m$  כאשר  $c_k \in M_n(f)$  לכל  $0 \leq k \leq m$  וקיימת מטריצה  $A \in M_n(f)$  נניח ש  $(tI - A)u(t) = g(t)$  כאשר הכפל הפורמלי נעשה בהנחה

$(B - A)u(B) = g(B)$  תהי  $B \in M_n(f)$  כך ש  $AB = BA$  אזי נקבל

**הוכחה:** נחשב פורמלית את  $g(t)$  בהנחה ש  $t$  סקלאר:

$$(tI - A)(c_0 + tc_1 + \dots + t^m c_m) = tc_0 + t^2 c_1 + \dots + t^{m+1} c_m - Ac_0 - tAc_1 - \dots - t^m Ac_m = -Ac_0 + t(c_0 - Ac_1) + t^2(c_1 - Ac_2) + \dots + t^m(c_{m-1} - Ac_m) + t^{m+1} c_m = g(t)$$

נציב את  $B$  ב  $g(B)$

$$g(B) = -Ac_0 + B(c_0 - Ac_1) + B^2(c_1 - Ac_2) + \dots + B^m(c_{m-1} - Ac_m) + B^{m+1} c_m$$

מצד שני:

$$(B - A)u(B) = (B - A)(c_0 + Bc_1 + \dots + B^m c_m) = Bc_0 + B^2 c_1 + \dots + B^{m+1} c_m - Ac_0 - BAc_1 - \dots - B^m Ac_m = -Ac_0 + B(c_0 - Ac_1) + B^2(c_1 - Ac_2) + \dots + B^m(c_{m-1} - Ac_m) + B^{m+1} c_m$$

ושני הפיתוחים זהים לחלוטין ולכן  $(B - A)u(B) = g(B)$  כנדרש.

**תוצאה מהטענה:** אם  $u(t) = c_0 + tc_1 + \dots + t^m c_m$  כאשר  $c_k \in M_n(f)$  לכל  $0 \leq k \leq m$

ו  $(tI - A)u(t) = g(t)$  כאשר הכפל הפורמלי נעשה בהנחה ש  $T$  סקלאר. אזי  $g(A) = 0$  ו **הוכחה:**  $AA = AA$  כי  $A$  מתחלף עם עצמו ולכן נציב  $g(A) = 0$

**סימון:** נסמן ע"י  $M_n(F[t])$  קבוצת כל המטריצות שאיבריהן פולינומים מעל  $F$ .

**דוגמה:** יהי  $f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$  כאשר  $c_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $c_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ;  $c_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  אזי:

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3t & 2-t^2 \\ 0 & 1+4t+t^2 \end{pmatrix}$$

כלומר שפולינום שמקדמיו מטריצות זוהי בעצם מטריצה שאיבריה פולינומים

(כאשר מתייחסים לזו כאל סקלאר) ויסומן ב  $\tilde{f}(t)$

**טענה 1:** קיימת התאמה חח"ע ועל בין אברי  $f(t) \in M_n(f)[t]$  לבין איברי

$$\tilde{f}(t) \in M_n(F[t])$$

**טענה 2:** עבור  $f, g \in M_n(f)[t]$  מתקיים  $\widetilde{f+g} = \tilde{f} + \tilde{g}$

**טענה 3:** עבור  $f, g \in M_n(f)[t]$  מתקיים  $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$

## משפט קיילי המילטון

**משפט:** תהי  $A \in M_n(F)$  אזי  $f_A(A) = 0$  כאשר  $f_A(t)$  הוא הפולינום האופייני של מטריצה  $A$

$$f_A(t) = \det(tI - A)$$

**הערה:**  $f_A(A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$

**תזכורת:** תהי  $A \in M_n(F)$ , דטרמיננטת המטריצה המתקבלת מ  $A$  ע"י מחיקת שורה  $i$  ועמודה  $j$  נקראת המינור של  $A$  המתאים לכל איבר  $a_{ij}$  נסמן כל מינור  $M_{ij}$ .

נסמן:  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  זהו המשלים האלגברי של  $a_{ij}$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0 \quad 1 \leq i \neq k \leq n \quad \text{לכל} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \det A \quad 1 \leq i \leq n$$

$$c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \text{Adj} A$$

נסמן: המטריצה המצורפת של  $A$   $\text{Adj} A$

$$(*) A \cdot \text{Adj} A = \begin{pmatrix} \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}$$

הוכחנו בסמסטר שעבר כי

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj} A \quad \text{אזי} \quad \det A \neq 0$$

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(F[t])$$

נסמן:  $A(t) = tI - A \in M_n(F)[t]$  אזי  $\tilde{A}(t) \in M_n(F[t])$

(1) נסמן  $\tilde{C}(t) = \text{Adj} \tilde{A}(t) \in M_n(F[t])$  ואזי לפי (\*) נקבל:

$$\tilde{A}(t) \tilde{C}(t) = \begin{pmatrix} \det \tilde{A}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det \tilde{A}(t) \end{pmatrix} \in M_n(F[t])$$

אבל  $\det \tilde{A}(t) = f_A(t)$  כלומר הוא

הפולינום האופייני של  $A$

רשמנו הטענה הבאה: יהיו  $u, f, g \in M_n(F)[t]$  ו  $\tilde{u}, \tilde{f}, \tilde{g} \in M_n(F[t])$  המתאימים אזי

$$\tilde{u} = \tilde{f} \tilde{g} \quad \text{אם ורק אם} \quad u = fg$$

לכן (1) גוררת את השוויון הבא (2)  $A(t)C(t) = f_A(t)I$  אבל  $A(t) = tI - A$  נסמן

$$(tI - A)C(t) = \sum_{i=0}^n b_i t^i = f_A(t)I \quad (3) \quad \text{ונקבל סופית} \quad f_A(t) = \sum_{i=0}^n b_i t^i$$

הוכחנו טענה שאם  $(tI - A)C(t) = f(t)$  כאשר  $C(t) \in M_n(f)[t]$  אזי  $f(A) = 0$  ולכן  
 כאן נקבל  $f_A(A) = \sum_{i=0}^n A^i (b_i I) = 0$  כלומר לסיכום הוכחנו כי לכל  $A \in M_n(f)$  מתקיים  
 $f_A(A) = 0$ .

**טענה:** יהי  $u \in F[t]$  שאיננו פולינום האפס. אם  $u(A) = 0$  אז  $u$  מתחלק ב  $m_A(t)$   
 (הפולינום המינימלי של  $A$ ) בלי שארית.

**הוכחה:** נחלק את  $u(t)$  ב  $m_A(t)$  עם שארית אזי נקבל  $u(t) = d(t)m_A(t) + r(t)$  כאשר  
 $\deg r(t) < \deg m_A(t); d(t), r(t) \in F[t]$ .

נציב  $t = A$  ונקבל  $0 = u(A) = d(A)m_A(A) + r(A) \Rightarrow r(A) = 0$

נניח בדרך השלילה ש  $r(t)$  איננו פולינום האפס אזי נקבל:

$$r(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_k t^k; c_k \neq 0$$

וכן  $r_1(A) = 0$  וזאת בסתירה  
 $c_k r_1(t) = \frac{c_0}{c_k} + \frac{c_1}{c_k} t + \dots + t^k; \deg r_1(t) = \deg r(t) < \deg m_A(t)$

למינימליות של  $m_A(t)$ . ולכן  $r(t)$  חייב להיות פולינום האפס.

**משפט קיילי המילטון צורה סופית:**

לכל  $A \in M_n(f)$

א.  $f_A(t)$  מתחלק ב  $m_A(t)$  ללא שארית.

ב.  $\deg m_A(t) \leq n$

**הוכחה:**

א. הוכחנו ש  $f_A(A) = 0$  וגם הוכחנו שאם  $f(A) = 0$  אזי  $f$  מתחלק ב  $m_A(t)$  בלי

שארית לכן  $f_A(t)$  מתחלק ב  $m_A(t)$  ללא שארית.

ב.  $f_A(A) = 0$  כמו כן  $f_A(t)$  הוא פולינום מתוקן ולכן  $\deg m_A(t) \leq \deg f_A(t) = n$

**טענה:** יהי  $g(t) \in M_n(F)[t]$  שאינו פולינום האפס כך ש  $g(A) = 0$  אזי קיים פולינום

$$g(t) = (tI - A)h(t) \text{ כך ש } h(t) \in M_n(F)[t]$$

**טענת עזר:** לכל  $k \geq 1$  מתקיים  $t^k I - A^k = (tI - A)h_k(t)$  כאשר  $h_k(t) = \sum_{i=0}^{k-1} t^i A^{k-1-i}$

$$h_k(t) = A^{k-1} + tA^{k-2} + t^2 A^{k-3} + \dots + t^{k-2} A + t^{k-1} I$$

לכן:

$$(tI - A)(A^{k-1} + tA^{k-2} + t^2 A^{k-3} + \dots + t^{k-2} A + t^{k-1} I) =$$

$$tA^{k-1} + t^2 A^{k-2} + t^3 A^{k-3} + \dots + t^{k-1} A + t^k I - A^k - tA^{k-1} - t^2 A^{k-2} - \dots - t^{k-2} A^2 + t^k I - t^{k-1} A = t^k I - A^k$$

כנדרש.

**הוכחת הטענה:** נרשום את  $g(t)$  בצורה המפורשת:  $g(t) = c_0 + tc_1 + \dots + t^l c_l$  אזי

$$0 = g(A) = c_0 + Ac_1 + \dots + A^l c_l$$

$$g(t) = g(t) - g(A) = (tI - A)c_1 + (t^2 I - A^2)c_2 + \dots + (t^l I - A^l)c_l$$

$$\text{לכן: } g(t) = \sum_{i=1}^l (t^i I - A^i)c_i = \sum_{i=1}^l (tI - A)h_i(t)c_i = (tI - A) \sum_{i=1}^l h_i(t)c_i = (tI - A)h(t)$$

**טענה:** הפולינום  $m_A(t)$  מתחלק ב  $f_A(t)$  ללא שארית.

**הוכחה:** נרשום את  $m_A(t)$  בצורה מפורשת:  $m_A(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i$

נגדיר פולינום  $m_A(t)I = M_A(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i I$

$m_A(A) = 0$  ולכן גם  $M_A(A) = 0$  ולכן לפי הטענה הקודמת קיים  $h(t) \in M_n(F)[t]$  כך

ש  $M_A(t) = (tI - A)h(t)$  נעבור למטריצות (לפי האיזומורפיזם)  $\widetilde{M}_A(t) = \widetilde{(tI - A)}\widetilde{h}(t)$

$$\text{נקח את } \begin{pmatrix} m_A(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_A(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & \vdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t-a_{nn} \end{pmatrix} \widetilde{h}(t)$$

הדטרמיננטה של שתי האגפים. ונקבל  $M_A^n(t) = f_A(t) \det \widetilde{h}(t)$  כלומר הפולינום האופייני מחלק את הפולינום המינימלי בלי שארית.

**תוצאה:** תהי  $A \in M_n(f)$  התנאים הבאים שקולים:

א.  $\lambda \in F$  הוא עייע של מטריצה A

ב.  $f_A(\lambda) = 0$

ג.  $m_A(\lambda) = 0$

**הוכחה:**

א  $\Leftrightarrow$  ב - הוכחנו כבר.

ב  $\Leftarrow$  ג -  $M_A^n(t) = f_A(t) d(t)$  ולכן  $M_A^n(\lambda) = f_A(\lambda) d(\lambda)$  ולכן  $M_A^n(\lambda) = 0$  כלומר

$$m_A(\lambda) = 0$$

ג  $\Leftarrow$  ב - לפי משפט קיילי המילטון  $f_A(t) = m_A(t) d_1(t)$  אבל לפי הנחה  $m_A(\lambda) = 0$

$$\text{ולכן } f_A(\lambda) = 0$$

**השלמה בנושא הפולינומים מעל  $\mathbb{C}$  :**

יהי  $f(t) \in \mathbb{C}[t]$  אזי :

א. ל  $f$  יש שורש אחד לפחות  $\alpha \in \mathbb{C}$  (הנשפט היסודי של האלגברה)

ב. אם  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  הם השורשים השונים של  $f$  אזי

$f(t) = a_n (t - \alpha_1)^{n_1} (t - \alpha_2)^{n_2} \dots (t - \alpha_k)^{n_k}$  כאשר  $a_n$  - המקדם העליון של  $f$

$$\sum_{i=1}^k n_i = n; 1 \leq i \leq k; n_i \geq 1$$

ג. יהי  $g(t) \in \mathbb{C}[t]$  שאינו פולינום האפס, אם  $f$  מתחלק ב  $g$  בלי שארית אזי כל

שורש של  $g$  הוא שורש של  $f$ , יתירה מזאת

$g(t) = b_m (t - \alpha_1)^{m_1} (t - \alpha_2)^{m_2} \dots (t - \alpha_k)^{m_k}$  כאשר  $b_m$  - המקדם העליון של  $g$

$$\sum_{i=1}^k m_i = m; 0 \leq m_i \leq n_i; m = \deg g$$

**תוצאה:** תהי  $A \in M_n(\mathbb{C})$  אזי :

א.  $f_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} (t - \lambda_2)^{n_2} \dots (t - \lambda_k)^{n_k}$  כאשר  $\lambda_i \in \mathbb{C}; 1 \leq i \leq k$  הם הערכים

העצמיים של  $A$  השונים זה מזה בפרט  $\sum_{i=1}^k n_i = n$

ב.  $m_A(t) = (t - \lambda_1)^{l_1} (t - \lambda_2)^{l_2} \dots (t - \lambda_k)^{l_k}$  כאשר  $1 \leq l_i \leq n_i$

## מרחבי מכפלה פנימית

### מכפלה סקלארית :

יהי  $V$  מ"ו מעל  $R$

הגדרה : העתקה המתאימה לכל זוג של וקטורים  $v, u \in V$  את מספר  $(u, v) \in R$  נקראת מכפלה סקלארית אם היא מקיימת את הדרישות הבאות :

א.  $(u, v) = (v, u)$  - סימטריות.

ב.  $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$  לכל  $v, u_1, u_2 \in V$  - לינאריות.

ג. לכל  $v, u \in V$  ולכל  $\alpha \in R$  מתקיים  $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$  - הומוגניות.

ד. אם  $v \in V$  שונה מאפס אזי  $(v, v) > 0$  - חיוביות.

### דוגמאות :

א. המכפלה הסקלארית הקלאסית :  $(v, u) = \|u\| \|v\| \cos \varphi; v, u \in R^3$

ב. כלומר  $u, v \in R^n$  נגדיר  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$   $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$   $(u, v) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

ג. יהי  $V$  מרחב  $n$  מימדי מעל  $R$  נבחר ב  $V$  בסיס כלשהו  $v_1 \dots v_n$  ונבחר  $n$

מספרים  $a_1 \dots a_n$  חיוביים. יהו  $u, v \in V$  שרירותיים אזי

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i a_i \quad \text{נגדיר} \quad u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i; v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$$

ד. נסמן  $V = C([0,1])$  - קבוצת כל הפונקציות הרציפות בעלות תחום ההגדרה

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \text{עבור} \quad f, g \in V \quad \text{נגדיר}$$

**טענה 1 :**  $\left( \sum_{m=1}^k \alpha_m u_m, v \right) = \sum_{m=1}^k \alpha_m (u_m, v)$  לכל  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}, u_1, u_2, \dots, u_k, v \in V$

**טענה 2 :**  $\left( v, \sum_{m=1}^k \alpha_m u_m \right) = \sum_{m=1}^k \alpha_m (v, u_m)$

**טענה 3 :**  $(0, u) = (u, 0) = 0$  לכל  $u \in V$

### מרחבים אוניטריים :

הגדרה : יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $C$ , ההעתקה המתאימה לכל זוג  $u, v \in V$  מספר  $(u, v) \in \mathbb{C}$  נקראת הרמטית אם היא מקיימת את התנאים הבאים :

א.  $(u, v) = \overline{(v, u)}$  - הרמטיות.

ב.  $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$  לכל  $v, u_1, u_2 \in V$  - לינאריות.

ג. לכל  $v, u \in V$  ולכל  $\alpha \in R$  מתקיים  $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$  - הומוגניות.

ד. אם  $v \in V$  שונה מאפס אזי  $(v, v) > 0$  - ממשי וחיובי.

הגדרה : מ"ו מעל  $C$  שבו מוגדרת מכפלה פנימית נקרא מרחב אוניטרי. מרחבים אוקלידיים ואוניטריים נקראים מרחבי מכפלה פנימית.

**טענה:** יהי  $V$  מרחב אוניטרי  $\alpha, \beta \in C, u, v \in V$  אזי  $(\alpha u, \beta v) = \alpha \bar{\beta} (u, v)$   
**הוכחה:**  $(\alpha u, \beta v) = \overline{(\beta v, \alpha u)} = \overline{\beta (v, \alpha u)} = \bar{\beta} (\alpha u, v) = \alpha \bar{\beta} (u, v)$   
**טענה:** יהי  $V$  מרחב אוניטרי  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in C, u_1, u_2, \dots, u_k, v \in V$  אזי:

$$\left( \sum_{m=1}^k \alpha_m u_m, v \right) = \sum_{m=1}^k \alpha_m (u_m, v)$$

**הוכחה:**

**נוכיח באינדוקציה:**

אם  $k=1$  נקבל  $(\alpha u, v) = \alpha (u, v)$  מתכונה שלוש של המכפלה ההרמטית  
 נניח נכונות הטענה עבור  $K$  ונוכיח עבור  $k+1$  ואכן:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{m=1}^{k+1} \alpha_m u_m, v \right) &= \left( \sum_{m=1}^k \alpha_m u_m + \alpha_{k+1} u_{k+1}, v \right) = \left( \sum_{m=1}^k \alpha_m u_m, v \right) + (\alpha_{k+1} u_{k+1}, v) = \\ &= \sum_{m=1}^k \alpha_m (u_m, v) + \alpha_{k+1} (u_{k+1}, v) = \sum_{m=1}^{k+1} \alpha_m (u_m, v) \end{aligned}$$

**טענה:** בתנאי הטענה הקודמת  $\left( v, \sum_{m=1}^k \alpha_m u_m \right) = \sum_{m=1}^k \bar{\alpha}_m (v, u_m)$

$$\left( v, \sum_{m=1}^k \alpha_m u_m \right) = \overline{\left( \sum_{m=1}^k \alpha_m u_m, v \right)} = \overline{\sum_{m=1}^k \alpha_m (u_m, v)} = \sum_{m=1}^k \bar{\alpha}_m \overline{(u_m, v)} = \sum_{m=1}^k \bar{\alpha}_m (v, u_m) : \text{הוכחה}$$

**הערה:** אותן התכונות נכונות גם במרחבים אוקלידים מעל  $R$  אך יש לזכור שבמקרה זה  $\alpha = \bar{\alpha}$  לכל  $\alpha \in R$ .

**סימון:** יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית נסמן  $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$  (מוצדק כי  $(v, v)$  תמיד גדול מאפס לפי תכונה ד').

**טענה 1:**  $\|v\| \geq 0$  לכל  $v \in V$  יתירה מזאת  $\|v\| = 0$  אמ"מ  $V=0$  (נובע מההגדרה)

**טענה 2:** יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית  $\alpha \in F, v \in V$  אזי  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ .  
**הוכחה:** נוכיח עבור המקרה האוניטרי:

$$\text{תזכורת: } x, y \in \mathbb{R}; \alpha = x + iy; |\alpha| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{אם } y=0 \text{ אזי } |\alpha| = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\text{לכל } \alpha \in \mathbb{C} \quad \alpha + \bar{\alpha} = 2\text{re}\alpha; \alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2$$

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \text{ ולכן } \|\alpha v\|^2 = (\alpha v, \alpha v) = \alpha \bar{\alpha} (v, v) = |\alpha|^2 \|v\|^2 : \text{הוכחה}$$

**טענה:** יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית  $v, u \in V$  אזי  $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 \pm 2\text{re}(u, v) \pm \|v\|^2$

$$\|u + v\|^2 = (u + v, u + v) = (u, u + v) + (v, u + v) = (u, u) + (u, v) + (v, u) + (v, v) =$$

$$\|u\|^2 + (u, v) + \overline{(u, v)} + \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2\text{re}(u, v) + \|v\|^2 : \text{הוכחה}$$

**הגדרה:** יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית  $0 \neq v, u \in V$  נסמן  $\cos(u, v) = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|}$

**דוגמא:**

## אי שיוון קושי שוורץ

משפט: יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית  $v, u \in V$  אזי:

$$1. |(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$$

2. השויון מתקיים אם ורק אם  $u, v$  תלויים לינארית.

דוגמאות:

$$(v, u) = \|u\| \|v\| \cos \varphi \quad \text{א. ב } R^2 \text{ or } R^3$$

$$|(v, u)| = \|u\| \|v\| |\cos \varphi| \leq \|u\| \|v\|$$

$$\text{ב. } u, v \in R^n \text{ כלומר } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ נגדיר } (u, v) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

$$\text{ג. ב } \mathbb{C}^n \text{ אי השויון הנ"ל מקבל את הצורה: } \left( \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)$$

ד.  $V = C([a, b])$  - קבוצת הפונקציות הרציפות המוגדרות על  $[a, b]$ :

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt; \Rightarrow \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$$

הוכחה:

שלב א. נחשב את הביטוי הבא:

$$\begin{aligned} & \|\alpha u - \beta v\|^2; \alpha = \|v\|^2 \in \mathbb{R}; \beta = (u, v) \in \mathbb{C} \\ & \|\alpha u - \beta v\|^2 = \|\alpha u\|^2 - 2\operatorname{Re} \alpha \bar{\beta} (u, v) + \|\beta v\|^2 = \\ & |\alpha|^2 \|u\|^2 - 2\operatorname{Re} \alpha \bar{\beta} (u, v) + |\beta|^2 \|v\|^2 = \\ & |\alpha|^2 \|u\|^2 - 2\operatorname{Re} \alpha \bar{\beta} \beta + |\beta|^2 \alpha = \\ & |\alpha|^2 \|u\|^2 - 2\alpha |\beta|^2 + |\beta|^2 \alpha = \\ & |\alpha|^2 \|u\|^2 - |\beta|^2 \alpha = \\ & \alpha (\alpha \|u\|^2 - |\beta|^2) = \\ & \|v\|^2 (\|v\|^2 \|u\|^2 - |(u, v)|^2) \end{aligned}$$

שלב ב:

$$\text{א. אם } v \neq 0 \text{ אזי } \|v\|^2 \|u\|^2 - |(u, v)|^2 = \frac{\|\alpha u - \beta v\|^2}{\|v\|^2} \geq 0$$

$$\begin{aligned} |u, v|^2 &\leq \|v\|^2 \|u\|^2 \\ |u, v| &\leq \|v\| \|u\| \end{aligned}$$

ומכאן אם  $v=0$  אזי  $|u, v| = \|v\| \|u\| = 0$

ב. נניח ש  $u, v$  תלויים לינארית זאת אומרת קיימים  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  כך ש

$\alpha u + \beta v = 0$  כאשר לפחות אחד שונה מאפס. יש שני אפשרויות:

1. אם  $\alpha = 0$  אזי  $\beta \neq 0$  וגם  $\beta v = 0$  כלומר  $v=0$  ואזי  $|u, v| = \|v\| \|u\| = 0$

2. אם  $\alpha \neq 0$  אז  $u = -\frac{\beta}{\alpha} v$  וז"א  $u = tv$  כאשר  $t = -\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{C}$  ואזי

$$|u, v| = |(tv, v)| = |t(v, v)| = |t| \|v\|^2 = \|tv\| \|v\| = \|u\| \|v\|$$

**בכיוון השני:** נניח  $|u, v| = \|v\| \|u\|$  (1) ונוכיח ש  $u, v$  תלויים לינארית

לכל  $u, v \in V$  מתקיים  $\| \alpha u - \beta v \|^2 = \|v\|^2 (\|v\|^2 \|u\|^2 - |u, v|^2)$  אם (1) מתקיים אזי

$\| \alpha u - \beta v \|^2 = 0$  ז"א  $\alpha u - \beta v = 0$  כאשר  $\alpha = \|v\|^2$ . יש שני אפשרויות:

א. אם  $\alpha = 0$  אזי  $\beta \neq 0$  וגם  $\beta v = 0$  כלומר  $v=0$  ולכן  $u, v$  תלויים לינארית.

ב. אם  $\alpha \neq 0$  אזי  $\alpha u - \beta v = 0$  והם תלויים לינארית.

**תזכורת:** אם  $\alpha = x + iy \in \mathbb{C}$  אזי  $|\alpha| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \geq x$

**משפט אי שוויון המשולש:**

1.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  ושוויון מתקיים רק אם הוקטורים תלויים לינארית.

2. תוצאה:  $\left| \|u\| + \|v\| \right| \leq \|u - v\|$

**הוכחה:**

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\operatorname{re}(u, v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|(u, v)| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

נוציא שורש ונקבל:  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

ברור שאם אחד הוקטורים הוא אפס אזי מתקיים שוויון לכן נדון רק במקרה שבו

שניהם שונים מאפס ואז נסמן  $u = tv$ .

**הוכחה:**

א. נניח שקיים  $0 < t \in \mathbb{R}$  כך ש  $u = tv$  אזי

$$\|u + v\| = \|t(v, v)\| = \|(t+1)v\| = |t+1| \|v\| = (t+1) \|v\|$$

$$\|u\| + \|v\| = \|tv\| + \|v\| = |t| \|v\| + \|v\| = (t+1) \|v\|$$

ב. נניח  $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$  אזי:

$$\|u + v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

$$\|v\|^2 + 2\operatorname{re}(v, u) + \|u\|^2 = \|v\|^2 + 2\|v\| \|u\| + \|u\|^2$$

$$(1)\operatorname{re}(v, u) = \|v\| \|u\|$$

אבל לכל מספר מרוכב  $\alpha \in \mathbb{C}$   $\operatorname{re} \alpha \leq |\alpha|$  יתירה מזאת אם  $\operatorname{re} \alpha = |\alpha|$  אזי  $\alpha$

ממשי ולכן  $\operatorname{re}(v, u) \leq |(v, u)| \leq \|v\| \|u\|$  (1) לכן יוצא מ(1)  $\operatorname{re}(v, u) = |(v, u)| = \|v\| \|u\|$

ולכן  $u, v$  תלויים לינארית זאת אומרת קיים  $t \in \mathbb{C}$  כך ש  $u = tv$  וגם  $(v, u) \in \mathbb{R}$  ויתירה מזאת  $(v, u) \geq 0$  ולכן  $\bar{t}(v, v) = (v, tv) \geq 0$  ולכן  $\bar{t}\|v\|^2 = \bar{t}(v, v) = (v, tv) \geq 0$  ולכן  $t = \bar{t} = \frac{(v, tv)}{\|v\|^2} \geq 0$  ואזי  $t, \bar{t} \in \mathbb{R}$  לכן  $t = \bar{t} = \frac{(v, tv)}{\|v\|^2} \geq 0$  וכן  $t \neq 0$  אחרת  $u=0$ .

### הוכחת התוצאה :

הטענה שקולה לטענה  $-\|u - v\| \leq \|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$

לפי אי שוויון המשולש מתקיים :

$$\|u\| = \|(u - v) + v\| \leq \|u - v\| + \|v\|$$

$$(1) \|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$$

$$\|v\| = \|(v - u) + u\| \leq \|v - u\| + \|u\|$$

אבל :  $\|v - u\| = \|-(u - v)\| = |-1|\|u - v\| = \|u - v\|$

$$\|v\| \leq \|u - v\| + \|u\|$$

ולכן :  $\|v\| - \|u\| \leq \|u - v\| / (-1)$

$$(2) -\|u - v\| \leq \|u\| - \|v\|$$

ומחיבור של (1) ו(2) נקבל את ההוכחה.

### פונקציית המרחק :

**הגדרה :** תהי  $d(u, v)$  פונקציה ממשית של וקטורים  $v, u \in V$  פונקציה ג נקראת פונקציית מרחק אם מקיימת את התנאים הבאים :

א. סימטריות  $d(u, v) = d(v, u)$  לכל  $v, u \in V$

ב.  $d(u, v) \geq 0$  יתירה מזאת  $d(u, v) = 0$  אם ורק אם  $u = v$

ג.  $d(u, v) \geq d(u, w) + d(w, v)$  לכל  $v, w, u \in V$

דוגמא : נגדיר את הפונקציה להיות  $d(u, v) = \|u - v\|$ , פונקציה זו מקיימת את כל שלושת התנאים לפונקציית מרחק.

## מערכות אורתונורמליות

החל מכאן  $V$  מרחב מכפלה פנימית.

**הגדרה:** אנו אומרים ש  $v, u \in V$  ניצבים (אורתוגונליים) זה לזה אם  $(u, v) = 0$  נסמן שני וקטורים כאלו:  $u \perp v$ .

**הגדרה:** סדרת וקטורים  $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$  נקראת אורתוגונלית אם לכל  $i \neq j$  מתקיים  $u_i \perp u_j$ .

**הגדרה:** סדרת וקטורים  $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$  נקראת אורתונורמלית אם היא אורתוגונלית ובנוסף לכל וקטור מתקיים  $\|u_i\| = 1$ .

**הערה:** לכל  $v \in V$  השונה מאפס ניתן להגדיר  $u = \frac{1}{\|v\|}v$  כך ש  $\|u\| = 1$  לכן אם סדרה

$v_1, v_2, \dots, v_k \in V$  סדרה אורתוגונלית ניתן להגדיר סדרה חדשה  $u_i = \frac{1}{\|v_i\|}v_i$  וברור שהסדרה החדשה היא אורתונורמלית.

**משפט:** תהי  $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$  סדרה אורתונורמלית ויהי  $v \in V$  אם  $v = \sum_{i=1}^n a_i u_i$  אז  $a_i = (v, u_i)$  לכל  $1 \leq i \leq k$

**הוכחה:** יהי  $u_j$  אחד מוקטורי הסדרה אזי:

$$(v, u_j) = \left( \sum_{i=1}^n a_i u_i, u_j \right) = \sum_{i=1}^n a_i (u_i, u_j) = a_j (u_j, u_j) = a_j \|u_j\|^2 = a_j$$

כי  $\|u_j\| = 1$  ועבור  $i \neq j$  מתקיים  $(u_i, u_j) = 0$

**תוצאה 1:** אם  $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$  סדרה אורתונורמלית אז היא בת"ל.

**הוכחה:** נניח בדרך השלילה שהיא תלויה לינארית, אזי קיימים המקדמים

$a_1, a_2, \dots, a_k \in F$  לא כולם אפס כך ש  $\sum_{i=1}^n a_i u_i = 0$  ולכן לפי המשפט לכל  $1 \leq i \leq k$   $a_i = (0, u_i) = 0$  בסתירה להנחה.

**תוצאה 2:** אם  $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$  סדרה אורתונורמלית ב  $V$  ו  $v \in \text{sp}(u_1 \dots u_k)$  אזי

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^k |a_i|^2 \quad \text{כאשר } a_i = (v, u_i)$$

**הוכחה:** אם  $v \in \text{sp}(u_1 \dots u_k)$  אזי קיימים מקדמים  $a_1, a_2, \dots, a_k \in F$  כך ש  $v = \sum_{i=1}^n a_i u_i$

לכן לפי המשפט  $a_i = (v, u_i)$  לכל  $1 \leq i \leq k$  ולכן מתקיים:

$$\|v\|^2 = (v, v) = \left(\sum_{i=1}^k a_i u_i, v\right) = \sum_{i=1}^k a_i (u_i, v) = \sum_{i=1}^k a_i \overline{(v, u_i)} = \sum_{i=1}^k a_i \overline{a_i} = \sum_{i=1}^k |a_i|^2$$

**תזכורת: משפט פיתגורס:** אם  $v, u \in V$  כך ש  $v \perp u$  אזי  $\|v\|^2 + \|u\|^2 = \|u+v\|^2$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\operatorname{re}(u, v) + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

**תוצאה 3:**  $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$  סדרה אורתונורמלית ויהי  $v \in V$  שרירותי נגדיר

$$a_i = (v, u_i) \text{ ונבנה וקטור חדש } g = \sum_{i=1}^k a_i u_i \text{ אזי } w = v - g \text{ ניצב ל } u_i \text{ לכל } 1 \leq i \leq k$$

**הוכחה:** לפי המשפט  $a_i = (g, u_i)$  לכל  $1 \leq i \leq k$  ולכן

$$1 \leq i \leq k \text{ לכל } (w, u_i) = (v - g, u_i) = (v, u_i) - (g, u_i) = a_i - a_i = 0$$

**הגדרה:** יהי  $U$  תת מרחב של  $V$  או אומרים ש  $v \in V$  ניצב ל  $U$  אם  $v \perp u$  לכל  $u \in U$  הסימון:  $v \perp U$ .

**טענה:** יהי  $u = \operatorname{sp}(v_1 \dots v_k)$  כאשר  $v_1 \dots v_k \in V$  וקטור כלשהו אזי  $v \perp U$  אם ורק

אם  $v \perp v_j$  לכל  $1 \leq j \leq k$

**הוכחה:** ברור שאם  $v \perp U$  אזי  $v \perp v_j$  לכל  $1 \leq j \leq k$

בכיוון השני יהי  $u \in U$  וקטור שרירותי אזי  $u = \sum_{j=1}^k a_j v_j$  ולכן אם  $v \perp v_j$  לכל

$$(u, v) = (v, \sum_{j=1}^k a_j v_j) = \sum_{j=1}^k \overline{a_j} (v, v_j) = 0 \text{ אזי } 1 \leq j \leq k$$

**תהליך גרהאם שמידט:**

**משפט:** תהי  $v_1 \dots v_k \in V$  סדרת וקטורים בת"ל אזי ניתן לבנות מערכת

אורתונורמלית

$$1 \leq m \leq k \text{ לכל } \operatorname{sp}(v_1 \dots v_m) = \operatorname{sp}(u_1 \dots u_m) \text{ כך ש } u_1, u_2, \dots, u_k \in V$$

**הוכחה:** נגדיר סדרת ביניים  $w_j \in V$  לכל  $1 \leq j \leq k$

$$W_m = \operatorname{sp}(v_1 \dots v_m) \quad U_m = \operatorname{sp}(u_1 \dots u_m)$$

נגדיר:

$u_1 = \frac{1}{\ w_1\ } w_1$	$w_1 = v_1$
$u_2 = \frac{1}{\ w_2\ } w_2$	$w_2 = v_2 - (v_2, u_1)u_1$
$u_3 = \frac{1}{\ w_3\ } w_3$	$w_3 = v_3 - (v_3, u_1)u_1 - (v_3, u_2)u_2$

ברור ש  $\|u_j\| = 1$  לכל  $1 \leq j \leq 3$ . כמו כן ברור ש  $U_1 = W_1 = \operatorname{sp}(v_1)$

קעת נבדוק עבור 2:

$$(w_2, u_1) = (v_2 - (v_2, u_1)u_1, u_1) = (v_2, u_1) - (v_2, u_1)(u_1, u_1) = (v_2, u_1) - (v_2, u_1) = 0$$

$$(u_2, u_1) = \frac{1}{\|w_2\|} (w_2, u_1) = 0 \text{ ולכן}$$

האם  $U_2 = W_2$  ?

$$u_1 \in U_1 = W_1 = sp(v_1) \subset W_2 = sp(v_1, v_2)$$

ברור ש  $v_2$  שייך ל  $W_2$  וגם  $w_2$  שייך ל  $W_2$  כי הוא צירוף לינארי של  $v_2$  ו  $u_1$ , לכן גם  $u_2$  שייך ל  $W_2$  ולכן  $U_2$  מוכל ב  $W_2$  אבל מכיוון שהמימד של  $U_2$  הוא 2 כי הוא מורכב מ  $span$  של וקטורים בת"ל וגם מימד  $W_2$  הוא 2 ברור כי  $W_2 = U_2$

**המשך הוכחה באינדוקציה :**

עבור  $k=1,2$  הוכחנו.

נניח שקיבלנו סדרת וקטורים  $v_1 \dots v_k, v_{k+1} \in V$  בת"ל ובנינו סדרת וקטורים אורתונורמליים  $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$  כך ש  $sp(v_1 \dots v_m) = sp(u_1 \dots u_m)$  לכל  $1 \leq m \leq k$  כעת נציב בתוצאה 3 את  $v_{k+1}$  :

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^k (v_{k+1}, u_j) u_j$$

אזי  $w_{k+1}$  אורתוגונלי ל  $U_k = sp(u_1 \dots u_k)$

נניח בשלילה כי  $w_{k+1} = 0$  אזי  $v_{k+1} = \sum_{j=1}^k (v_{k+1}, u_j) u_j \in U_k$  אבל לפי הנחת האינדוקציה

$U_k = W_k$  לכן נקבל ש  $v_{k+1}$  שייך ל  $W_k$  וזאת בסתירה להנחה כי  $v_1 \dots v_k, v_{k+1} \in V$  בת"ל

ולכן  $w_{k+1} \neq 0$  וניתן להגדיר  $u_{k+1} = \frac{1}{\|w_{k+1}\|} w_{k+1}$  ואזי  $(u_{k+1}, u_j) = 0$  לכל  $1 \leq j \leq k$

נשאר להוכיח ש  $U_{k+1} = W_{k+1}$  :

אכן כמו כן  $w_{k+1} \in W_{k+1}$  כי הוא צ"ל של  $u_1, u_2, \dots, u_k, v_{k+1}$  ולכן גם  $u_{k+1} \in W_{k+1}$ .

**מסקנה :**  $U_{k+1} \subset W_{k+1}$ .

אבל  $\dim W_{k+1} = k+1$  וגם  $\dim U_{k+1} = k+1$  ולכן ברור ש  $U_{k+1} = W_{k+1}$ .

**תוצאה :**

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית (מעל  $R$  או  $C$ ) ויהי  $U$  ת"מ של  $V$  בעל מימד סופי אזי ניתן לבחור בסיס אורתונורמלי של  $U$ .

**הוכחה :** יהי  $v_1 \dots v_k \in U$  בסיס של  $U$  נפעיל על סדרה זו תהליך גרהם שמידט ונקבל

סדרה אורתונורמלית  $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$  כך ש  $sp(v_1 \dots v_m) = sp(u_1 \dots u_m)$  לכל  $1 \leq m \leq k$ ,

ובפרט זה נכון עבור  $m=k$  ומכיוון שכל סדרה אורתונורמלית היא בת"ל אזי

$u_1, u_2, \dots, u_k \in U$  מהווים בסיס אורתונורמלי של  $U$ .

## סכומים וסכומים ישרים של תתי מרחבים

יהי  $V$  מרחב לינארי מעל שדה  $F$  כלשהו ויהיו  $U_1, U_2, W$  תתי מרחבים של  $V$  כך ש  
 $U_1 \subset W$  וגם  $U_2 \subset W$  אנו אומרים ש  $W$  הוא הסכום של  $U_1$  ו  $U_2$  אם לכל  $v \in W$   
 ניתן למצוא  $u_1 \in U_1$  ו  $u_2 \in U_2$  כך ש  $v = u_1 + u_2$ .

**הגדרה:** בתנאי ההגדרה הקודמת אנו אומרים ש  $W$  הוא סכום ישר של  $U_1$  ו  $U_2$  אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א.  $W = U_1 + U_2$

ב.  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

הסימון יהיה  $W = U_1 \oplus U_2$

**טענה:** אם  $W = U_1 \oplus U_2$  אזי קיים  $u_1 \in U_1$  ו  $u_2 \in U_2$  יחידים אשר לכל  $v \in W$   
 מקיימים  $v = u_1 + u_2$ .

**הוכחה:** נניח ש  $v = u_1 + u_2$  וגם  $v = u_1' + u_2'$  כאשר  $u_1, u_1' \in U_1$  וגם  $u_2, u_2' \in U_2$   
 $u_1 + u_2 = u_1' + u_2' \Rightarrow u_1 - u_1' = u_2 - u_2' \Rightarrow u_1 - u_1' \in U_1 \cap U_2 = \{0\} \Rightarrow u_1 = u_1'$

**טענה 2:** אם  $W = U_1 \oplus U_2$  ו  $W$  בעל מימד סופי אזי  $\dim W = \dim U_1 + \dim U_2$

**הוכחה:** נבחר בסיס  $v_1 \dots v_k \in U_1$  בסיס של  $U_1$  ונבחר בסיס  $u_1, u_2, \dots, u_m \in U_2$  של  $U_2$   
 נוכיח ש  $v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_m$  בסיס של  $W$ . ראשית נוכיח שקבוצה זו הנה בת"ל:

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k + t_{k+1} u_1 + \dots + t_{k+m} u_m = 0$$

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = -t_{k+1} u_1 - \dots - t_{k+m} u_m$$

וקטור זה שייך גם ל  $U_1$  וגם ל  $U_2$  שהחיתוך ביניהם כידוע הוא וקטור האפס בלבד.  
 ולכן נקבל:  $t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0$  ומכיוון ש  $v_1 \dots v_k \in U_1$  בסיס אזי נקבל כי  $t_i = 0$  לכל  
 $1 \leq i \leq k$  וממשיכים לפי הוכחת משפט המימדים.

הערה: כמובן שזהו מקרה פרטי של משפט המימדים:

אם  $W = U_1 + U_2$  אזי  $\dim W = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

## המשלים האורתוגונלי :

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית (מעל  $R$  או  $C$ ) ויהי  $U$  ת"מ של  $V$  בעל מימד סופי.

**הגדרה :** קבוצת כל הוקטורים של  $V$  הניצבים ל  $U$  נקראת המשלים האורתוגונלי של  $U$  הסימון יהיה :  $U^\perp := \{w \in V : w \perp U\}$

**טענה 1 :**  $U^\perp$  הנו ת"מ לינארי של  $V$ .  
**הוכחה :**

א.  $0 \in U^\perp$  כי  $(0, v) = 0$  לכל  $v \in U$ . **קבוצה לא ריקה**  
ב. אם  $w_1, w_2 \in U^\perp$  אזי לכל  $v \in U$  מתקיים  $(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2) = 0 + 0 = 0$  ולכן  $w_1 + w_2 \in U^\perp$ . **סגירות לחיבור**  
ג. אם  $t \in F$  ו  $w \in U^\perp$  אזי לכל  $v \in U$  נקבל  $(v, tw) = \bar{t}(v, w) = \bar{t} \cdot 0 = 0$  ולכן  $tw \in U^\perp$ . **סגירות לכפל.**  
ולכן  $U^\perp$  הוא ת"מ.

**משפט :** יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית בעל מימד סופי,  $U$  תת מרחב של  $V$  אזי  
 $V = U \oplus U^\perp$

**הוכחה :** נבחר בסיס אורתונורמלי של  $U$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ , הוכחנו שעבור כל  $v \in V$  קיימים וקטורים  $w$  ו  $g$  כך ש

$$v = w + g \text{ כי } w = v - g \in U^\perp, g = \sum_{i=1}^k (v, u_i) u_i \in U$$

$V = U + U^\perp$ . כעת נניח כי  $v \in U \cap U^\perp$  אזי  $(v, v) = 0$  ולכן  $v = 0$  ז"א  $U \cap U^\perp = \{0\}$  דהיינו  $V = U \oplus U^\perp$  כנדרש.

**טענה 2 :** יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית בעל מימד סופי  $U$  תת מרחב של  $V$  אזי  
 $(U^\perp)^\perp = U$

**הוכחה :** נניח ש  $v \in U$  אזי עבור כל  $w \in U^\perp$  נקבל ש  $(w, v) = 0$  ז"א  $v$  ניצב ל  $U^\perp$  ולכן  $v \in (U^\perp)^\perp$ , כלומר  $U \subset (U^\perp)^\perp$ .

בכיוון השני נניח עכשיו כי  $v \in (U^\perp)^\perp$  אזי  $(v, w) = 0$  לכל  $w \in U^\perp$  אבל  $V = U \oplus U^\perp$  כלומר קיימים וקטורים  $w \in U^\perp$  ו  $g \in U$  כך ש  $v = g + w$  לכן :

$$\|w\|^2 = (w, w) = (w, v - g) = (w, v) - (w, g) = 0 - 0 = 0$$

$v \in U$  כנדרש לכן  $(U^\perp)^\perp \subset U$  כלומר  $U = (U^\perp)^\perp$  כנדרש.

## ”מירכוב” של מרחבים לינאריים מעל $\mathbb{R}$

יהי  $V$  מרחב לינארי מעל  $\mathbb{R}$  נגדיר קבוצת כל הביטויים הפורמליים מן הצורה  
הבאה:  $v_1 + iv_2$  כאשר  $i \in \mathbb{C}, v_1, v_2 \in V$  כלומר  $\bar{V} = \{v_1 + iv_2 : v_1, v_2 \in V\}$   
אנו אומרים ש  $v_1 + iv_2 = u_1 + iu_2$  אם  $v_1 = u_1$  ו  $v_2 = u_2$ .  
נגדיר חיבור:  $(v_1 + iv_2) + (u_1 + iu_2) = (v_1 + u_1) + i(v_2 + u_2)$   
נגדיר כפל: אם  $z \in \mathbb{C}$  כלומר  $z = x + iy$  אזי  $z \cdot (v_1 + iv_2) = (xv_1 + yv_2) + i(xv_2 + yv_1)$   
על מנת להוכיח שזהו מרחב לינארי מעל  $\mathbb{C}$  יש צורך להוכיח את כל התכונות של  
מרחבים לינאריים.

## העתקות לינאריות במרחבי מכפלה פנימית

### פונקציונליים לינאריים במרחבי מכפלה פנימית.

**הגדרה:** פונקציונל לינארי המוגדר במרחב לינארי  $V$  מעל  $F$  הוא העתקה לינארית מ  $V$  ל  $F$ .

**הערה:**  $F$  הוא מ"ו מעל  $F$  כאשר  $\dim F = 1$ .

**תזכורת:**  $\text{Hom}(V, W)$  – מרחב כל ההעתקות הלינאריות מ  $V$  ל  $W$ .

בפרט אם  $\dim V = n$  ו  $\dim W = m$  אזי  $\dim \text{Hom}(V, W) = m \cdot n$

סימון  $V^* = \text{Hom}(V, F)$  ז"א ממרחב כל הפונקציונליים הלינאריים של  $V$ , נקרא גם המרחב הדואלי של  $V$

**מסקנה:**  $\dim V^* = n$ .

נסמן פונקציונלים לינאריים באותיות יווניות.

יהי  $\varphi: V \rightarrow F$  פונקציונל לינארי נתבונן ב  $\text{Im } \varphi$  שהוא כמובן ת"מ לינארי של  $F$  אז יש רק שני אפשרויות:

א.  $\dim \text{Im } \varphi = 0$  ואז  $\text{Im } \varphi = \{0\}$  כלומר  $\varphi(v) = 0$  לכל  $v \in V$ . פונקציונל כזה נקרא פונקציונל האפס.

ב.  $\dim \text{Im } \varphi = 1$  ואז  $\text{Im } \varphi = F$  ואז  $\dim \text{Ker } \varphi = n - 1$

החל מעכשיו  $V$  מרחב מכפלה פנימית מעל  $R$  או  $C$ .

**משפט:** יהי  $\varphi \in V^*$  שרירותי אזי קיים וקטור  $p \in V$  יחיד כך ש  $(v, p) = \varphi(v)$  לכל  $v \in V$ .

**הוכחה:** במקרה שזהו פונקציונל האפס זה טריוויאלי (נבחר את  $p$  להיות 0) נדון במקרה של פונקציונל שונה מפונקציונל האפס.

ראשית נוכיח קיום: נסמן  $U = \text{ker } \varphi$  אזי  $\dim U = n - 1$  כאשר  $n = \dim V$  אזי

$V = U \oplus U^\perp$  כאשר  $\dim U + \dim U^\perp = n$  ולכן  $\dim U^\perp = 1$  כלומר ניתן לבחור ב  $U^\perp$  בסיס בעל וקטור אחד  $u_0 \neq 0$  לכן עבור כל  $w \in U^\perp$  קיים  $t \in F$  כך ש  $w = tu_0$

נגדיר  $p = \frac{\overline{\varphi(u_0)}}{\|u_0\|^2} u_0$  ונוכיח שעבור כל  $v \in V$  מתקיים  $(v, p) = \varphi(v)$ .

אכן אם  $v \in V$  אזי  $v = g + w$  כאשר  $g \in U, w \in U^\perp$  זאת אומרת  $v = g + tu_0$  לכן:

$$(1) (v, p) = (g + tu_0, \frac{\overline{\varphi(u_0)}}{\|u_0\|^2} u_0) = (g, u_0) + (tu_0, \frac{\overline{\varphi(u_0)}}{\|u_0\|^2} u_0) = 0 + \frac{\varphi(u_0)}{\|u_0\|^2} (tu_0, u_0) = \frac{\varphi(u_0)}{\|u_0\|^2} t(u_0, u_0) = t\varphi(u_0)$$

$$(2) \varphi(v) = \varphi(g + tu_0) = \varphi(g) + t\varphi(u_0) = t\varphi(u_0)$$

**טענת עזר:** אם  $(v, w_1) = (v, w_2)$  לכל  $v \in V$  אז  $w_1 = w_2$ .

**הוכחה:** נקבל מיד  $(v, w_1 - w_2) = 0$  עבור כל  $v \in V$  ולכן אם נציב  $v = w_1 - w_2$  נקבל

$$\|w_1 - w_2\|^2 = (w_1 - w_2, w_1 - w_2) = 0 \text{ כנדרש.}$$

**הוכחת יחידות:** נניח שקימים  $p_1, p_2$  השייכים ל  $V$  כך ש  $(v, p_1) = (v, p_2) = \varphi(v)$  לכל  $v \in V$

אזי  $(v, p_2) = (v, p_1)$  לכל  $v \in V$  ולכן לפי טענת העזר  $p_1 = p_2$ .

**סימון:** בהתאם למשפט זה, ניתן לסמן הוקטור היחיד במקיים  $(v, p_\varphi) = \varphi(v)$  לכל  $v \in V$ .

**טענה 1:** לכל  $\alpha \in \mathbb{C}, \varphi_1, \varphi_2 \in V^*$  מתקיים:

$$א. p_{\varphi_1 + \varphi_2} = p_{\varphi_1} + p_{\varphi_2}$$

$$ב. p_{\alpha\varphi_1} = \overline{\alpha} p_{\varphi_1}$$

**הוכחה:**

א. נסמן  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  אזי לכל  $v \in V$  מתקיים:

$$\varphi(v) = (v, p_\varphi), \varphi_1(v) = (v, p_{\varphi_1}), \varphi_2(v) = (v, p_{\varphi_2})$$

$$אבל: \varphi(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(v) = (v, p_{\varphi_1}) + (v, p_{\varphi_2}) = (v, p_{\varphi_1} + p_{\varphi_2})$$

$$לכן (v, p_\varphi) = (v, p_{\varphi_1} + p_{\varphi_2})$$

ולפי טענת העזר  $p_{\varphi_1 + \varphi_2} = p_{\varphi_1} + p_{\varphi_2}$  כנדרש.

ב. נסמן  $\varphi = \alpha\varphi_1$  ואזי  $\varphi(v) = (v, p_\varphi)$  אבל גם  $\varphi(v) = \alpha\varphi_1(v) = \alpha(v, p_{\varphi_1}) = (v, \alpha p_{\varphi_1})$

$$ולכן  $p_{\alpha\varphi_1} = \overline{\alpha} p_{\varphi_1}$  כנדרש.$$

**תוספת מהתרגול:**

**משפט:** לכל בסיס  $v_1, \dots, v_n$  של  $V$  קיים בסיס  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  של  $V^*$  המקיים

$$לבסיס כנ"ל נקרא הבסיס הדואלי של  $v_1, \dots, v_n$   $\delta_{ij} \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}; \varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$$$

**הוכחה:** נתון  $V$  מ"ו  $v_1, \dots, v_n$  בסיס נגדיר פונקציונלים לינאריים  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  באופן הבא:

$$\varphi_i(v) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_i(v_j) \in F \text{ ואזי } v = \sum_{j=1}^n a_j v_j \text{ כל } v \in V \text{ נראה כד } \varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases};$$

קיבלנו  $n$  פונקציונלים לינאריים שונים, נראה כי  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  בת"ל ב  $V^*$ :

$$\text{נקח } \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i = 0 \text{ ונוכיח כי כל } c_i = 0. \text{ נפעיל את שני האגפים על } v_j \text{ לכל } 1 \leq j \leq n$$

$$\text{ונקבל } \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(v_j) = 0(v_j) = 0_F \Rightarrow c_j = 0$$

**משפט:** קיים איזומורפיזם בין  $V$  ל  $V^{**}$  כאשר  $V^{**} = \{g: V^* \rightarrow F\}$  כלומר נבנה ט"ל

$$h: V \rightarrow V^{**}$$

שתהיה איזומורפיזם.

**הוכחה:** לכל  $v \in V$  נגדיר  $h_v \in V^{**}$  בצורה הבאה  $h_v: V^* \rightarrow F$ , לכל  $\varphi \in V^*$

$$h_v(\varphi) = \varphi(v) \in F$$

$$h_v(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1 + \varphi_2)(v) = (\varphi_1)(v) + (\varphi_2)(v) = h_v(\varphi_1) + h_v(\varphi_2)$$

$$h_v(a\varphi_1) = (a\varphi_1)(v) = a(\varphi_1)(v) = ah_v(\varphi_1)$$

$h_v \in V^{**}$  ולכן  $h: V \rightarrow V^{**}$  מוגדרת  $h(v) = h_v \in V^{**}$  ראשית נראה כי  $h$  לינארית:

$$\text{יהו } v_1, v_2 \in V; a \in F \text{ אזי}$$

## העתקה צמודה:

**משפט:** יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{R}$  או  $\mathbb{C}$   $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית נתונה אזי קיימת העתקה לינארית יחידה  $T^*$  המקיימת את השוויון:  $(T(v), w) = (v, T^*(w))$  לכל  $v, w \in V$ .

**הוכחה:** יהי  $w \in V$  נגדיר פונקציה  $\varphi_w: V \rightarrow F$  על ידי הנוסחה הבאה

$$\begin{aligned} \varphi_w(v) &= (T(v), w) \\ \varphi_w(v_1 + v_2) &= (T(v_1 + v_2), w) = (T(v_1) + T(v_2), w) = (T(v_1), w) + (T(v_2), w) = \varphi_w(v_1) + \varphi_w(v_2) \\ \varphi_w(\alpha v_1) &= (T(\alpha v_1), w) = (\alpha T(v_1), w) = \alpha (T(v_1), w) = \alpha \varphi_w(v_1) \end{aligned}$$

כלומר לכל  $w \in V$  פונקציה זו הנה פונקציונל לינארי.

מהם התכונות שלו? אם  $w_1, w_2 \in V$  אזי עבור כל  $v \in V$  מתקיים:

$$\begin{aligned} \varphi_{w_1+w_2}(v) &= (T(v), w_1 + w_2) = (T(v), w_1) + (T(v), w_2) = \varphi_{w_1}(v) + \varphi_{w_2}(v) \Rightarrow \varphi_{w_1+w_2} = \varphi_{w_1} + \varphi_{w_2} \\ \varphi_{\alpha w}(v) &= (T(v), \alpha w) = \overline{\alpha} (T(v), w) = \overline{\alpha} \varphi_w(v) \end{aligned}$$

נגדיר העתקה  $T^*: V \rightarrow V$  לפי הנוסחה הבאה: לכל  $w \in V$   $T^*(w) = P_{\varphi_w}$

**תזכורת:** כאן בהתאם לטענה הקודמת  $P_{\varphi_w}$  הוקטור היחיד המקיים  $\varphi_w(v) = (v, p_{\varphi_w})$  לכל  $v \in V$ .

נראה כי ההעתקה הזו לינארית: יהו  $w_1, w_2 \in V$  ו  $\alpha \in F$  ואזי

$$T^*(w_1 + w_2) = p_{\varphi_{w_1+w_2}} = p_{\varphi_{w_1}} + p_{\varphi_{w_2}} = T^*(w_1) + T^*(w_2)$$

$$T^*(\alpha w_1) = p_{\varphi_{\alpha w_1}} = \overline{\alpha} p_{\varphi_{w_1}} = \overline{\alpha} T^*(w_1)$$

ולכן ההעתקה לינארית, נציב בנוסחה המופיעה בתזכורת ונקבל  $(T(v), w) = (v, T^*(w))$  לכל  $v \in V, w \in V$  שרירותי.

**הוכחת יחידות:** נניח ש  $G: V \rightarrow V$  העתקה לינארית שמקיימת  $(T(v), w) = (v, G(w))$  אזי  $(v, T^*(w)) = (v, G(w))$  לכל  $v \in V$  ולכן לפי טענת העזר  $T^*(w) = G(w)$  לכל  $w \in V$  ז"א  $T^* = G$

### תכונות של $T^*$

**משפט:** אם  $T, S: V \rightarrow V$  שני העתקות לינאריות אזי:

$$(T + S)^* = T^* + S^* \quad .1$$

$$(TS)^* = S^*T^* \quad .2$$

$$(\alpha T)^* = \alpha T^* \leftarrow \alpha \in \mathbb{R}; (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^* \leftarrow \alpha \in \mathbb{C} \quad .3$$

$$(T^*)^* = T \quad .4$$

**הוכחה:** יהו  $v, w \in V$  שרירותיים אזי:

$$(v, (T + S)^*(w)) = ((T + S)(v), w) = (T(v) + S(v), w) = (T(v), w) + (S(v), w) \quad .1$$

$$(v, (T^* + S^*)(w)) = (v, T^*(w) + S^*(w)) = (v, T^*(w)) + (v, S^*(w)) = (T(v), w) + (S(v), w)$$

$$(v, (TS)^*(w)) = ((TS)(v), w) \quad .2$$

$$(v, (S^*T^*)(w)) = (v, S^*(T^*(w))) = (S(v), T^*(w)) = ((TS)(v), w)$$

.3 מקרה פרטי של (2) כי כפל בסקאלר הוא העתקה לינארית.

$$4. \quad (v, (T^*)^*(w)) = (T^*(v), w) = \overline{(w, T^*(v))} = \overline{(T(w), v)} = (v, T(w))$$

$$(T^*)^* = T \text{ נקבל כי}$$

**טענה:** יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית מעל  $C$  התנאים הבאים שקולים:

א.  $(T(v), v) = 0$  לכל  $v \in V$

ב.  $(T(v), w) = 0$  לכל  $v, w \in V$

ג.  $T = 0$

**הוכחה:** א  $\Leftarrow$  ב : יהו  $v, w \in V$  אזי

$$0 = (T(v+w), v+w) = (T(v), v) + (T(v), w) + (T(w), v) + (T(w), w)$$

$$\text{מסקנה: } (T(v), w) + (T(w), v) = 0$$

$$\text{בדומה: } 0 = (T(iv+w), iv+w) = (T(iv), iv) + (T(iv), w) + (T(w), iv) + (T(w), w)$$

$$\text{מסקנה: } (T(iv), w) + (T(w), iv) = i(T(v), w) - i(T(w), v) \text{ ולכן } (T(v), w) - (T(w), v) = 0$$

ונקבל מהיחס בין שתי המסקנות כי  $(T(v), w) = 0$

$$\text{ב} \Leftarrow \text{ג: } (T(v), w) = (0(v), w) \Rightarrow T = 0$$

$$\text{ג} \Leftarrow \text{א: } (T(v), v) = (0(v), v) = (0, v) = 0$$

**הערה:** טענה זו איננה נכונה במרחב אוקלידי לדוגמה  $V = \mathbb{R}^2$  מעל  $\mathbb{R}$ , ונקח את

המכפלה הסקלארית הסטנדרטית. נגדיר העתקה  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  ברור כי זו איננה

$$\text{העתקת האפס אבל } (T(v), v) = -xy + yx = 0.$$

**משפט:** תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית (כאן  $V$  הוא מעל  $\mathbb{R}$  או  $\mathbb{C}$ ), תהי  $A = [T]_{\Gamma}$

כאשר  $\Gamma = (v_1 \dots v_n)$  בסיס אורתונורמלי. אם  $B = [T^*]_{\Gamma}$  אזי  $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$  לכל  $1 \leq i, j \leq n$ .

$$\text{הוכחה: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ מטריצה של } T \text{ ביחס לבסיס } \Gamma \text{ ז"א } T(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$$

לכל  $1 \leq j \leq n$

תזכורת: אם  $\Gamma$  אורתונורמלי ו  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$  אזי  $\alpha_i = (v, v_i)$  לכל  $1 \leq i \leq n$

כלומר כאן לכל  $1 \leq i, j \leq n$  מתקיים  $a_{ij} = (T(v_j), v_i)$  וכן  $b_{ij} = (T^*(v_j), v_i)$

ולכן  $a_{ij} = (T(v_j), v_i) = (v_j, T^*(v_i)) = \overline{(T^*(v_i), v_j)} = \overline{b_{ji}}$

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}} \Leftarrow b_{ji} = \overline{a_{ij}} \Leftarrow a_{ij} = \overline{b_{ji}}$$

**סימון:** נסמן את מטריצה  $B$  כ  $A^*$ .

מקרה פרטי: אם השדה הוא  $\mathbb{R}$  אזי  $B = A^* = A^T$

**העתקה צמודה לעצמה:**

**הגדרה:** אנו אומרים ש  $T: V \rightarrow V$  צמודה לעצמה אם  $T = T^*$ , זאת אומרת

$$(T(v), w) = (v, T(w)) \text{ לכל } v, w \in V.$$

אם השדה הוא  $\mathbb{R}$  אנו אומרים ש  $T$  סימטרית.

אם השדה הוא  $\mathbb{C}$  אנו אומרים ש  $T$  הרמטית.

**טענה:** תהי  $T: V \rightarrow V$  צמודה לעצמה ותהי  $A = [T]_{\Gamma}$  כאשר  $\Gamma = (v_1 \dots v_n)$  בסיס

אורתונורמלי אזי  $A = A^*$

**הגדרה:** אנו אומרים ש  $A$  צמודה לעצמה אם  $A = A^*$  (מעל  $R$  סימטרית, מעל  $C$  הרמטית)

**טענה 1:** תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית שרירותית אזי:

1.  $T + T^*$  צמודה לעצמה.

2.  $TT^*$  צמודה לעצמה.

**הוכחה:**

1.  $(T + T^*)^* = T^* + (T^*)^* = T^* + T = T + T^*$

2.  $(TT^*)^* = (T^*)^* T^* = TT^*$

**טענה 2:** יהי  $V$  מרחב אוניטרי ו  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית שרירותית אזי

$S = i(T^* - T)$  צמודה לעצמה:

**הוכחה:**  $S^* = (i(T^* - T))^* = \bar{i}(T^* - T)^* = -i((T^*)^* - T^*) = -i(T - T^*) = i(T^* - T) = S$

### שיעור 5.5.04

**טענה 3:** אם  $T$  הרמטית ו  $\lambda \in \mathbb{R}$  אזי  $\lambda T$  גם הרמטית.

**הוכחה:**  $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^* = \lambda T$

**טענה 4:** תהי  $T$  לינארית שרירותית אזי קיימות שתי העתקות הרמטיות  $T_1, T_2$  כך ש

$T^* = T_1 - iT_2; T = T_1 + iT_2$

**הוכחה:**

ברור כי אלו העתקות הרמטיות לפי הטענות  $T_2 = \frac{1}{2}i(T^* - T); T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$

הקודמות. אבל  $T = \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}i(T^* - T) = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T^* + \frac{1}{2}(i)^2 T^* - \frac{1}{2}(i)^2 T = T$  וכן

$T^* = (\frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}i(T^* - T))^* = \frac{1}{2}(T^* + T) + \frac{1}{2}(iT_2)^* = T_1 + \bar{i}T_2^* = T_1 - iT_2$

**טענה 5:** הרמטית אם ורק אם לכל  $v \in V$  מתקיים  $(T(v), v) \in \mathbb{R}$

**הוכחה:** נניח ש  $T$  הרמטית אזי  $(T(v), v) = (v, T(v))$  לכל  $v \in V$  אבל

$(v, T(v)) = \overline{(T(v), v)}$  ולכן  $(T(v), v) = \overline{(T(v), v)}$  ולכן  $(T(v), v) \in \mathbb{R}$

בכיוון השני: תזכורת אם  $(T(v), v) = 0$  לכל  $v \in V$  אזי  $T \equiv 0$

נניח ש  $T$  לינארית כך ש  $(T(v), v) \in \mathbb{R}$  לכל  $v \in V$  אזי:

$(T^*(v), v) = (v, T^*(v)) = \overline{(T(v), v)} = (T(v), v)$

נתבונן ב  $T - T^*$  אזי לכל  $v \in V$   $(T - T^*)(v), v) = (T(v), v) - (T^*(v), v) = 0 \Rightarrow T = T^*$

### העתקות אנטי הרמטיות

**הגדרה:**  $T$  תקרא אנטי הרמטית אם  $T^* = -T$

**טענה 1:** הרמטית אם ורק אם  $iT$  אנטי הרמטית.

**הוכחה:**  $\Leftarrow$  נניח  $T$  הרמטית ונסמן  $S = iT$  אזי  $S^* = (iT)^* = \bar{i}T^* = -iT^* = -S$

$$\Rightarrow \text{נניח } S=iT \text{ אנטי הרמטית אזי } T = \frac{1}{i}S = -iS \text{ ולכן } T^* = \overline{-iS} = i(-S) = -iS = T$$

**טענה 2:** אם  $T$  הרמטית וגם אנטי הרמטית אזי  $T=0$

$$\text{הוכחה: } T=0 \Leftarrow T = -T \Leftarrow -T = T^* = T$$

**טענה:** בפיתוח  $T = T_1 + iT_2$  כאשר  $T_2, T_1$  הרמטיות  $T_2, T_1$  מוגדרות באופן חד ערכי.

**הוכחה:** נניח ש  $T = S_1 + iS_2$  כאשר  $S_2, S_1$  הרמטיות אזי

$$T_1 + iT_2 = S_1 + iS_2 \Rightarrow T_1 - S_1 = i(S_2 - T_2)$$

אבל  $T_1 - S_1$  הרמטית וגם  $S_2 - T_2$  הרמטית לכן  $i(S_2 - T_2)$  אנטי הרמטית ולכן

$$T_1 - S_1 = i(S_2 - T_2) \text{ הרמטית וגם אנטי הרמטית ולכן } T_1 - S_1 = 0 \text{ ולכן } T_1 = S_1; T_2 = S_2$$

### העתקות סימטריות במרחב אוקלידי

**טענה:** תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה סימטרית, כאשר  $V$  אוקלידי אזי התנאים הבאים שקולים:

א.  $(T(v), v) = 0$  לכל  $v \in V$

ב.  $(T(v), w) = 0$  לכל  $v, w \in V$

ג.  $T = 0$

**הוכחה:** א  $\Leftarrow$  ב נניח  $(T(v), v) = 0$  לכל  $v \in V$  אזי לכל  $v, w \in V$  מתקיים

$$0 = (T(v+w), v+w) = (T(v), v) + (T(v), w) + (T(w), v) + (T(w), w) = (T(w), v) + (v, T(w)) = (v, T(w)) + (v, T(w)) = 2(v, T(w)) = 0 \Rightarrow (v, T(w)) = 0 \Rightarrow (T(v), w) = 0$$

ב  $\Leftarrow$  ג נניח  $(T(v), w) = 0$  לכל  $v, w \in V$  אזי נציב  $w = T(v)$  ל  $v \in V$  שרירותי ונקבל

$$T = 0 \text{ ומכאן נקבל } T(v) = 0 \text{ לכל } v \in V \Leftarrow \|T(v)\|^2 = 0 \Leftarrow (T(v), T(v)) = 0$$

ג  $\Leftarrow$  א - טריויאלי.

### העתקות אוניטריות

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{R}$  או  $\mathbb{C}$   $T: V \rightarrow V$  לינארית

**הגדרה:** העתקה  $T$  תקרא אוניטרית אם  $(T(v), T(w)) = (v, w)$  לכל  $v, w \in V$

**הערה:** כאשר  $F = \mathbb{R}$  אומרים גם ש  $T$  אורתוגונלית.

**משפט:** התנאים הבאים שקולים:

(א)  $T$  אוניטרית.

(ב)  $\|T(v)\| = \|v\|$  לכל  $v \in V$

(ג) הפיכה ו  $T^* = T^{-1}$  כלומר  $T \circ T^* = I$  וגם  $T^* \circ T = I$

(ד) לכל בסיס אורתונורמלי  $\Gamma = (v_1 \dots v_n)$  של  $V$  גם  $T(v_1) \dots T(v_n)$  בסיס

אורתונורמלי.

(ה) קיים בסיס אורתונורמלי  $\Gamma = (v_1 \dots v_n)$  כך ש  $T(v_1) \dots T(v_n)$  אורתונורמלי.

**הוכחה:**

(א)  $\Leftarrow$  (ב) נניח ש  $T$  אוניטרית, זאת אומרת  $(T(v), T(w)) = (v, w)$  לכל  $v, w \in V$  בפרט

$$\|T(v)\|^2 = (T(v), T(v)) = (v, v) = \|v\|^2 \Rightarrow \|v\| = \|T(v)\|$$

(ב)  $\Leftarrow$  (ג) נניח  $\|T(v)\| = \|v\|$  לכל  $v \in V$  אזי  $(T(v), T(v)) = (v, v)$  ולכן לפי הגדרה של

$$T^* \text{ נקבל } (T^*T(v), v) = (T(v), T(v)) = (v, v) \text{ כלומר } ((T^*T - I)(v), v) = 0 \text{ לכל } v \in V$$

כעת:

אם אנחנו מעל  $C$  אזי ברור ש  $T^*T = I$

אם אנחנו מעל  $R$  צריכים להוכיח שהיא סימטרית כלומר  $T^*T = I$  אכן

$$T^*T = I \text{ כלומר } T^*T - I = 0 \text{ ולכן } (T^*T - I)^* = (T^*T)^* - I^* = T^*T^{**} - I = T^*T - I$$

כנדרש. מכיוון ש  $V$  הוא בעל מימד סופי נקבל גם כי  $T^* = T^{-1}$

(ג)  $\Leftarrow$  (ד) נניח ש  $T^* = T^{-1}$  יהי  $\Gamma = (v_1 \dots v_n)$  בסיס אורתונורמלי שרירותי, נגדיר

בסיס חדש  $1 \leq i \leq n \quad u_i = T(v_i)$  אזי נקבל:

$$u_i \text{ היא } 1. \text{ נותר להראות כי הם אורתוגונליים זה לזה: } 1 = (v_i, v_i) = (v_i, (T^*T)(v_i)) = (T(v_i), T(v_i)) = (u_i, u_i)$$

הם בת"ל ומהווים בסיס כי  $\dim W = n$

$$i \neq j \Rightarrow (u_i, u_j) = (T(v_i), T(v_j)) = (v_i, (T^*T)(v_j)) = (v_i, v_j) = 0$$

(ד)  $\Leftarrow$  (ה) מקרה פרטי.

(ה)  $\Leftarrow$  (א)

**טענת עזר:** יהי  $\Gamma = (v_1 \dots v_n)$  בסיס אורתונורמלי של  $V$  אם  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i; w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$  אזי

$$(v, w) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \text{ (המשמעות היא שניתן לייצג כל מכפלה פנימית כמכפלה סטנדרטית עפ"י בסיס אורתונורמלי)}$$

**הוכחה:** למדנו שאם  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$  אזי  $(v, v_i) = a_i$  כאשר  $\Gamma = (v_1 \dots v_n)$  בסיס

$$\text{אורתונורמלי לכן } (v, w) = (v, \sum_{i=1}^n b_i v_i) = \sum_{i=1}^n \bar{b}_i (v, v_i) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i$$

**הוכחת (ה)  $\Leftarrow$  (א)** נניח שקיים  $\Gamma = (v_1 \dots v_n)$  בסיס אורתונורמלי כך שגם

$T(v_1) \dots T(v_n)$  אורתונורמלי. נסמן  $1 \leq i \leq n \quad w_i = T(v_i)$  כלומר  $w_1 \dots w_n$  אורתונורמלי.

יהי  $v, w \in V$  אזי  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i; w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$  ולכן לפי טענת העזר  $(v, w) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i$  אבל

$$T(v) = \sum_{i=1}^n a_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n a_i w_i; T(w) = \sum_{i=1}^n b_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n b_i w_i$$

הבסיס החדש  $w_1 \dots w_n$  שגם הוא אורתונורמלי נקבל  $(T(v), T(w)) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i = (v, w)$

לכל  $v, w \in V$  כנדרש ולכן  $T$  אוניטרית.

**הגדרה:** אנו אומרים ש  $A \in M_n(F)$  אוניטרית אם  $A^* = A^{-1}$  (מעל  $R$  – אורתוגונלית)

**טענה 1:** תהי  $T: V \rightarrow V$  (כאשר  $V$  ממ"פ בעל מימד סופי מעל  $R$  או  $C$ ) העתקה לינארית יהי  $\Gamma = (v_1 \dots v_n)$  בסיס אורתונורמלי של  $V$  נסמן  $A = [T]_{\Gamma}$  אזי  $A$  אוניטרית

אם ורק אם  $T$  אוניטרית

**הוכחה:** הוכחנו שאם  $A = [T]_{\Gamma}$  אזי  $A^* = [T^*]_{\Gamma}$  (נכון לכל העתקה לינארית ולכל

בסיס אורתונורמלי)

$\Leftarrow$  נניח ש  $A$  אוניטרית אזי  $AA^* = I$  ולכן  $[TT^*]_{\Gamma}^{\Gamma} = [T]_{\Gamma}^{\Gamma} [T^*]_{\Gamma}^{\Gamma} = AA^* = I$  ולכן  $T$  אוניטרית.

$\Rightarrow$  נניח ש  $T$  אוניטרית אזי  $TT^* = I$  ולכן  $[TT^*]_{\Gamma}^{\Gamma} = I$  מכאן ש  $AA^* = [T]_{\Gamma}^{\Gamma} [T^*]_{\Gamma}^{\Gamma} = [TT^*]_{\Gamma}^{\Gamma} = I$  ולכן  $A^* = A^{-1}$  ולכן  $A$  אוניטרית.

**עובדה:**  $[S]_{\Gamma}^{\Gamma} = I$  אם ורק אם  $S$  העתקת הזהות ולכן  $TT^* = I$

**תוצאה:** נגדיר העתקה:  $T_A: F^n \rightarrow F^n$  כאשר ב  $F^n$  מוגדרת המכפלה הסקלארית או ההרמטית הסטנדרטית, אזי  $T_A$  אוניטרית אם ורק אם  $A$  אוניטרית  
**הוכחה:** הבסיס הסטנדרטי  $E$  הוא אורתונורמלי ומתקיים  $[T_A]_E = A$   
**הערה:** תהי  $A$  אוניטרית אזי העתקה  $T_A: F^n \rightarrow F^n$  המוגדרת ע"י  $T_A(v) = Av$  לכל  $v \in F^n$  היא אוניטרית לפי התוצאה.  $E$  הוא בסיס אורתונורמלי של  $F^n$ , לכן, גם  $w_i = T_A(e_i) = Ae_i$  לכל  $1 \leq i \leq n$  בסיס זה הוא גם אורתונורמלי אבל  $Ae_i$  זו עמודה ה  $i$  של  $A$ .

**מסקנה:** אם  $A$  אוניטרית אזי העמודות של  $A$  הם בסיס אורתונורמלי של  $F^n$ .  
**תרגיל:** הוכיחו שאם העמודות של מטריצה  $A$  ריבועית כלשהי מעל שדה  $F$  הן בסיס אורתונורמלי של  $F^n$  אזי  $A$  אוניטרית.

**טענת עזר:** אם  $A$  אוניטרית אזי גם  $A^*$  אוניטרית.

**הוכחה:**  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A; (A^*)^* = A \Rightarrow (A^*)^* = (A^*)^{-1}$

**טענה 2:** אם  $A$  אוניטרית אזי השורות של  $A$  הן בסיס אורתונורמלי של  $F^n$

**הוכחה:** לפי טענת העזר  $A^*$  אוניטרית אבל  $A^* = (b_{ij})_{i,j=1}^n; A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  כאשר

$$v_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}; v_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} \quad \text{לכל } 1 \leq i \leq n, \text{ העמודות של } A^* \text{ הן מן הצורה } a_{ij} = \overline{b_{ji}} \text{ ואז לפי}$$

המסקנה הקודמת העמודות של  $A^*$  הן בסיס אורתונורמלי של  $F^n$  ביחס למכפלה

הפנימית הסטנדרטית. לכן:  $0 = (v_j, v_k) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \overline{b_{ik}} = \sum_{i=1}^n \overline{a_{ji} a_{ki}} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \overline{a_{ji}}$

המכפלה הפנימית הסטנדרטית שבין השורות  $K$  וה  $J$  של  $A$ . כלומר כל שורות  $A$  אורתוגונליות זו לזו. כעת נוכיח גם כי הנוקמה של כל שורה שווה ל 1:

$$1 = (v_j, v_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \overline{b_{ij}} = \sum_{i=1}^n a_{ji} \overline{a_{ji}} = \sum_{i=1}^n |a_{ji}|^2$$

כנדרש.  $A$

**טענה:**

א. יהו  $\Gamma, \Phi$  שני בסיסים אורתונורמליים במרחב מכפלה פנימית כלשהו  $V$  הוכיחו שמטריצת המעבר ביניהם היא אוניטרית.

ב. תהי  $A$  מטריצה אוניטרית, הוכיחו שקיים מרחב מכפלה פנימית  $V$  ובו שני בסיסים  $\Gamma, \Phi$  כל ש  $A$  היא מטריצת המעבר ביניהם.

תוספת מהתרגול :

**משפט :** תהי  $T$  ט"ל אוניטרית  $A$  המטריצה שלה ביחס לבסיס אורתונורמלי אזי  $|\det A| = 1$ .

$$TT^* = I \Rightarrow A\bar{A}' = I \Rightarrow \det A\bar{A}' = \det I = 1 \Rightarrow$$

**הוכחה :**

$$\det A \det \bar{A}' = 1 \Rightarrow (\det A)\overline{(\det A)} = 1 \Rightarrow |\det A| = 1$$

**משפט :** תהי  $T$  ט"ל אוניטרית  $v$  וקטור עצמי עם ערך עצמי  $\lambda$  אזי  $\lambda\bar{\lambda} = 1$

**הוכחה :**  $(v, v) = (Tv, Tv) = (\lambda v, \lambda v) = \lambda\bar{\lambda}(v, v) \Rightarrow \lambda\bar{\lambda} = 1$

**משפט :** יהו  $v, u$  וקטורים עצמיים של  $T$  ט"ל אוניטרית בעלי עייע שונים אזי הם ניצבים.

**הוכחה :** נסמן  $\lambda$  עייע של  $v$  ו  $\mu$  עייע של  $u$  אזי נקבל  $(v, u) = (Tv, Tu) = (\lambda v, \mu u) = \lambda\bar{\mu}(v, u)$  נניח  $(v, u) \neq 0$  אזי נקבל  $1 = \lambda\bar{\mu}$  אבל מהמשפט הקודם אנחנו יודעים כי  $\mu\bar{\mu} = 1$  ולכן נקבל כי  $\lambda = \mu$  וזאת בסתירה להנחה.

### העתקות נורמליות

**הגדרה :**  $T: V \rightarrow V$  נורמלית אם  $TT^* = T^*T$

**הערה :** אם  $T$  צמודה לעצמה אזי  $TT^* = TT = T^*T$  ולכן היא נורמלית.

אם  $T$  אוניטרית אזי  $TT^* = I = T^*T$  ולכן היא נורמלית.

**טענה 1 :** אם  $T$  נורמלית אזי לכל ערך עצמי  $\lambda \in F$  של  $T$  מתקיים  $\bar{\lambda}$  הוא ערך עצמי של  $T^*$  ביחס לאותו וקטור עצמי  $V$  (כלומר אם  $T(v) = \lambda v$  אזי  $T^*(v) = \bar{\lambda}v$ )

**טענת עזר :** לכל העתקה  $T: V \rightarrow V$  נורמלית מתקיים  $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$  לכל  $v \in V$

**הוכחה :**  $\|T(v)\|^2 = (T(v), T(v)) = (v, T^*(T(v))) = (v, T(T^*(v))) = (T^*(v), T^*(v)) = \|T^*(v)\|^2$

**הוכחת טענה 1 :** נגדיר  $S = \lambda I - T$  נוכיח שגם היא נורמלית:  $S^* = \bar{\lambda}I - T^*$  ולכן נקבל

$$SS^* = (\lambda I - T)(\bar{\lambda}I - T^*) = \lambda\bar{\lambda}I - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + TT^*$$

כי כלומר  $S$  נורמלית.

$$S^*S = (\bar{\lambda}I - T^*)(\lambda I - T) = \lambda\bar{\lambda}I - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + T^*T$$

כעת יהי  $v \in V$  כך ש  $T(v) = \lambda v$  אזי  $S(v) = \lambda v - T(v) = 0$  ומכאן נקבל

$$0 = \|S(v)\| = \|S^*(v)\| = \|\bar{\lambda}I - T^*\| T^*(v) = \bar{\lambda}v$$

**טענה 2 :** יהי  $V$  ממ"פ מעל  $F$  בעל מימד סופי, אם  $v_1, v_2$  שני וקטורים עצמיים של העתקה נורמלית  $T$  כך ש  $T(v_1) = \lambda_1 v_1; T(v_2) = \lambda_2 v_2$  ונתון ש  $\lambda_2 \neq \lambda_1$  אזי  $v_1 \perp v_2$ .

**הוכחה :**  $\lambda_1(v_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, v_2) = (T(v_1), v_2) = (v_1, T^*(v_2)) = (v_1, \bar{\lambda}_2 v_2) = \bar{\lambda}_2(v_1, v_2) = \lambda_2(v_1, v_2)$

ומכאן נקבל כי  $(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1, v_2) = 0$  אבל נתון כי  $\lambda_2 \neq \lambda_1$  ולכן נקבל את המסקנה כי  $(v_1, v_2) = 0$ .

### תת מרחבים אינווריאנטים

יהי  $V$  מרחב לינארי מעל שדה  $F$ , תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית. הגדרה: יהי  $U$  תת מרחב של  $V$ ,  $U$  יקרא **אינווריאנטי** אם עבור כל  $v \in U$  גם  $T(v) \in U$

אם  $U$  אינווריאנטי לגבי  $T$  אזי ניתן להגדיר העתקה  $T_u: U \rightarrow U$  המוגדרת כך: לכל  $v \in U$  נגדיר  $T_u(v) = t(v)$ . זהו בעצם רק שינוי של תחום ההגדרה של ההעתקה. להעתקה כזו קוראים הצמצום של  $T$  לתת מרחב  $U$ . בפרט ניתן לבחור ב  $U$  בסיס  $\Gamma = (v_1 \dots v_m)$  ונגדיר מטריצה  $A \in M_n(F)$  באופן רגיל

$$A = [T_u]_{\Gamma} \text{ אזי לכל } 1 \leq j \leq m \text{ מתקיים } T_u(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i$$

**טענה 3:** יהי  $U, v \in U$  תת מרחב אינווריאנטי לגבי  $T$  אזי:

$$T_u(v) = T(v) = \lambda v \Leftrightarrow [v]_{\Gamma} = \lambda [v]_{\Gamma} \Leftrightarrow A[v]_{\Gamma} = \lambda [v]_{\Gamma} \text{ כאשר } [v]_{\Gamma} \text{ הוא וקטור הקוארדינטות של } v \text{ ביחס לבסיס } \Gamma \text{ ו } A = [T_u]_{\Gamma}.$$

**הוכחה:** טענה שכזאת נכונה לגבי כל העתקה וכל בסיס בכל מרחב לינארי בעל מימד סופי (הוכח במסגרת לימוד ערכים עצמיים) בפרט היא נכונה עבור  $U$  כמרחב לינארי מעל  $F$  (כי כל תת מרחב הוא מרחב מעל  $F$ ) ועבור ההעתקה  $T_u: U \rightarrow U$ .

**מסקנה:** יהי  $V$  מרחב לינארי מעל  $C$  ויהי  $U \neq \{0\}$  תת מרחב של  $V$  אינווריאנטי לגבי העתקה לינארית  $T: V \rightarrow V$ , אזי קיים וקטור אחד לפחות  $v \in U$  השונה מאפס כך ש  $T(v) = \lambda v$ , כלומר  $\lambda$  הוא ערך עצמי של  $T$ .

**הוכחה:** נגדיר את מטריצה  $A$  כמו בטענה 3  $A \in M_m(C)$  וידוע (המשפט היסודי של האלגברה) שלכל מטריצה כזו קיים  $0 \neq u \in C^m$  אחד לפחות כך

$$Au = \lambda u \text{ נרשום } \lambda \in C; u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ כאשר } 1 \leq i \leq m; x_i \in C \text{ נגדיר וקטור } v = \sum_{i=1}^m x_i v_i$$

כאשר  $\Gamma = (v_1 \dots v_m)$  בסיס של  $U$  אזי  $u = [v]_{\Gamma}$  היינו  $A[v]_{\Gamma} = \lambda [v]_{\Gamma}$  ולכן לפי טענה 3 נקבל כי  $T_u(v) = T(v) = \lambda v$  כלומר  $\lambda$  הוא ערך עצמי של  $T$ .

**טענה 4:** יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית מעל  $C$  או  $R$  ותהי  $T: V \rightarrow V$  לינארית. אם  $U$  אינווריאנטי ביחס ל  $T^*$  אזי  $U^{\perp}$  אינווריאנטי לגבי  $T$ .

**הוכחה:** יהי  $v \in U^{\perp}$  ואזי עבור כל  $w \in U$  מתקיים  $(v, w) = 0$  נתבונן ב  $w \in U$  שרירותי ונקבל  $(T(v), w) = (v, T^*(w)) = 0$  כי  $T^*(w) \in U$  בגלל האינווריאנטיות. כלומר  $T(v) \in U^{\perp}$  ז"א  $U^{\perp}$  אינווריאנטי לגבי  $T$ .

**משפט:** יהי  $V$  מרחב אוניטרי ותהי  $T: V \rightarrow V$  נורמלית אזי קיים בסיס

אורתונורמלי של  $V$  המורכב כולו מוקטורים עצמיים של  $T$ .

**הוכחה:** יהיו  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in C$  כל הערכים העצמיים של  $T$  השונים זה מזה. נסמן המרחב העצמי של  $T$  המתאים ל  $\lambda_i$ :  $V_i = \{v \in V : T(v) = \lambda_i v\}$  ברור שכל אחת מן הקבוצות  $V_i$  היא תת מרחב לינארי של  $V$  נבחר בכל תת מרחב  $V_i$  בסיס אורתונורמלי  $\Gamma_i$ , זה תמיד אפשרי לפי תהליך גראהם שמידט. נגדיר סדרה סופית

$\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$  נקבל  $\Gamma = (v_1 \dots v_m)$  נוכיח שזו מערכת אורתונורמלית. אם  $v_j \in \Gamma$  אזי  
 $v_j \in \Gamma_i$  בעבור  $I$  מסוים ולכן  $\|v_j\| = 1$  כי  $\Gamma_i$  הוא בסיס אורתונורמלי. ברור ש  $v_j$  הוא  
 וקטור עצמי של  $T$  כי  $v_j \in \Gamma_i$  זאת אומרת  $T(v_j) = \lambda_i v_j$ .  
 יהיו  $v_j, v_k \in \Gamma$  כאשר  $j \neq k$  כעת ישנן שתי אפשרויות:  
 אם  $v_j, v_k \in \Gamma_i$  עבור  $\Gamma_i$  מסוים אזי, מכיוון ש  $\Gamma_i$  אורתונורמלי נקבל כי  $(v_j, v_k) = 0$   
 אם  $v_k \in \Gamma_l, v_j \in \Gamma_i$  כאשר  $l \neq i$  אזי  $T(v_k) = \lambda_l v_k$  ו  $T(v_j) = \lambda_i v_j$  לכן לפי טענה 2  
 $v_k \perp v_j$ .

הוכחנו ש  $\Gamma = (v_1 \dots v_m)$  מערכת אורתונורמלית המורכבת מוקטורים עצמיים של  $T$   
 (בפרט הם בת"ל) נסמן:  $U = sp(v_1 \dots v_m)$  ברור ש  $\Gamma$  בסיס של  $U$ . לכל  $v_i \in \Gamma$  מתקיים

$$\text{לפי טענה 1 } T^*(v_i) = \bar{\lambda}_i v_i \in U \text{ אז } v_i \in \Gamma_j \text{ לכן אם } v \in U \text{ אז } v = \sum_{i=1}^m a_i v_i, \text{ לכן}$$

$$T^*(v) = \sum_{i=1}^m a_i T^*(v_i) \text{ אבל } T^*(v_i) \in U \text{ לכל } 1 \leq i \leq m \text{ לכן } T^*(v) \in U \text{ ז"א } U \text{ אינווריאנטי}$$

לגבי  $T^*$  לכן לפי טענה 4  $U^\perp$  אינווריאנטי לגבי  $T$ .

**נניח בדרך השלילה** ש  $U \neq V$  אזי  $m < \dim V$  ז"א  $\dim U^\perp = \dim V - m \geq 1$  אז לפי  
 המסקנה שרשמנו קיים  $v \in U^\perp$  השונה מאפס כך ש  $T(v) = \lambda v$  הוא ע"ע של  $T$ .  
 ז"א  $\lambda = \lambda_i$  עבור  $i$  מסוים כך ש  $1 \leq i \leq m$  (אחד מאלו שסימנו בתחילת ההוכחה) ז"א  
 $T(v) = \lambda_i v$  ז"א  $v \in V_i \subseteq U$  לכן  $v \in U \cap U^\perp$  כלומר  $v=0$  **בסתירה**. ולכן  $U=V$  כלומר  
 $m = \dim V; V = sp(v_1 \dots v_m)$  בסיס של  $V$  כנדרש.

**תוצאה:** לכל העתקה נורמלית  $T$  במרחב אוניטרי קיים בסיס  $\Gamma$  אורתונורמלי כך  
 ש  $[T]_\Gamma$  היא אלכסונית.

#### שיעור 16.5.04

**הגדרה:**  $A \in M_n(\mathbb{C})$  נקראת נורמלית אם  $AA^* = A^*A$ .

**טענה:** יהי  $V$  מרחב אוניטרי (בעל מימד סופי) ותהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית.  
 יהי  $\Gamma$  בסיס אורתונורמלי של  $V$ . נסמן  $A = [T]_\Gamma$  אזי  $A$  נורמלית אם ורק אם  $T$   
 נורמלית.

$$\text{הוכחנו כי } \Gamma \text{ אורתונורמלי ולכן } [T^*]_\Gamma = A^*$$

**הוכחת הטענה:**

$\Rightarrow$  נניח כי  $T$  נורמלית אזי  $TT^* = T^*T$  ולכן נוכל לרשום:

$$AA^* = A^*A \text{ ומכאן נקבל כי } [T^*T]_\Gamma = [T^*]_\Gamma [T]_\Gamma = A^*A; [TT^*]_\Gamma = [T]_\Gamma [T^*]_\Gamma = AA^*$$

$\Leftarrow$  אם  $AA^* = A^*A$  אזי ניתן להוכיח ש  $TT^* = T^*T$  (תרגיל) חשוב לזכור שאם שתי  
 העתקות מיוצגות ביחס לאותו בסיס ע"י אותה מטריצה אז זוהי אותה העתקה.

**משפט:** תהי  $A \in M_n(\mathbb{C})$  מטריצה נורמלית אזי קיימת מטריצה אוניטרית  $U$

ומטריצה אלכסונית  $B$  כך ש  $UAU^* = B$ . יתירה מזאת  $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$  כאשר

$\lambda_1 \dots \lambda_n$  הם הערכים העצמיים של  $A$  (לא בהכרח שונים זה מזה)

**הוכחה:** נגדיר העתקה  $T_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  על ידי הנוסחה  $T_A(v) = Av$  לכל  $v \in \mathbb{C}^n$  אזי

$[T_A]_E = A$  כאשר  $E$  הוא הבסיס הסטנדרטי שהוא אורתונורמלי ביחס למכפלה ההרמטית הסטנדרטית ב  $\mathbb{C}^n$ , לכן לפי הטענה  $T_A$  נורמלית. לכן קיים בסיס  $\Gamma$  של  $\mathbb{C}^n$  אורתונורמלי ביחס למכפלה ההרמטית הסטנדרטית המורכב כולו מוקטורים עצמיים של  $T_A$ , שהם כמובן וקטורים עצמיים של  $A$  (אכן אם  $T_A(v) = \lambda v$  אז  $Av = \lambda v$  על פי הגדרת ההעתקה שהגדרנו) ידוע שאם קיים בסיס של  $\mathbb{C}^n$  שמורכב כולו מוקטורים עצמיים של  $A$  אז  $\Gamma = (v_1, \dots, v_n)$  כאשר  $Av_i = \lambda_i v_i$   $1 \leq i \leq n$  אז

כאשר  $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  במקרה שלנו  $\Gamma$  הוא אורתונורמלי  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$

לכן העמודות של  $P$  הן מערכת אורתונורמלית, דהיינו  $P$  אוניטרית ולכן  $P^{-1} = P^*$

נסמן  $U = P^*$  ולכן  $U^* = P$  ונקבל  $UAU^* = B$  כאשר  $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$  כנדרש.

**משפט:** תהי  $A \in M_n(\mathbb{C})$  מטריצה נורמלית אזי קיימת מטריצה אוניטרית  $U$

ומטריצה הרמטית  $H$  כך ש  $A = UH = HU$ .

**הוכחה:** תהי  $B$  מטריצה אלכסונית, ז"א  $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$   $1 \leq i \leq n; \lambda_i \in \mathbb{C}$  נרשום

כל  $\lambda_j$  בצורה  $\lambda_j = r_j(\cos \varphi_j + i \sin \varphi_j)$   $1 \leq j \leq n$  נסמן  $z_j = \cos \varphi_j + i \sin \varphi_j$  אזי  $|z_j| = 1$

לכן  $\lambda_j = r_j z_j$  כאשר  $0 \leq r_j \in \mathbb{R}$  וכן  $z_j \bar{z}_j = 1$  נסמן מטריצה  $H_1 = \begin{pmatrix} r_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & r_n \end{pmatrix}$  וכן

מטריצה  $U_1 = \begin{pmatrix} z_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & z_n \end{pmatrix}$  אם כופלים שתי מטריצות אלכסוניות מקבלים

מטריצה אלכסונית כאשר באלכסון ישנו כפל איבר איבר ולכן נקבל

$$H_1 U_1 = U_1 H_1 = \begin{pmatrix} r_1 z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n z_n \end{pmatrix} = B$$

$$H_1^* = \overline{H_1}' = \begin{pmatrix} \overline{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{r_n} \end{pmatrix} = H_1$$

ומכיוון ש  $0 \leq r_j \in \mathbb{R}$  אזי נקבל כי  $H_1$  הרמטית.

$$U_1 U_1^* = \begin{pmatrix} \overline{z_1} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z_n} z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I$$

ולכן  $U_1^*$  ולפי (1) נקבל  $U_1^* = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z_n} \end{pmatrix}$

$U_1$  אוניטרית.

תהי  $A$  נורמלית כלשהי

$$U A U^* = B$$

$$\underbrace{(U^* U)}_I \underbrace{A \underbrace{U^* U}_I} = U^* B U \quad (\text{הסבר}) \quad A = U_2 B U_2^*$$

$$A = \underbrace{U^*}_{u_2} B \underbrace{U}_{u_2^*}$$

$$. H_1 U_1 = U_1 H_1 = B$$

**מסקנה:**

$$U = U_2 U_1 U_2^*; H = U_2 H_1 U_2^* \quad (2) \quad A = U_2 U_1 H_1 U_2^* = U_2 U_1 U_2^* U_2 H_1 U_2^* = UH$$

$$H \text{ נוכיח כי הרמטית: } H^* = (U_2 H_1 U_2^*)^* = (U_2^*)^* H_1^* U_2^* = U_2 H_1 U_2^* = H$$

לכן  $H$  הרמטית.

$$U^{-1} = (U_2 U_1 U_2^*)^{-1} = (U_2^*)^{-1} U_1^{-1} U_2^{-1} = U_2 U_1^* U_2^*$$

לכן  $U$  נוכיח כי  $U$  אוניטרית:  $U^* = (U_2 U_1 U_2^*)^* = (U_2^*)^* U_1^* U_2^* = U_2 U_1^* U_2^* = U^{-1}$

אוניטרית.

$$HU = (U_2 H_1 U_2^*) \underbrace{(U_2 U_1 U_2^*)}_I = U_2 H_1 U_1 U_2^* \quad HU \text{ נחשב את } UH = U_2 U_1 H_1 U_2^* \quad (2)$$

אבל  $U_1 H_1 = H_1 U_1$  כי שניהם אלכסוניות ולכן  $UH = HU$  כנדרש.

**טענה:** תהי  $A$  מטריצה נורמלית אם כל הערכים העצמיים של  $A$  הם ממשיים אזי היא הרמטית.

$$\text{הוכחה: } A = U B U^* \text{ כאשר } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

כאשר  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  הם הערכים העצמיים

של  $A$  (לא בהכרח שונים זה מזה). נתון ש  $\lambda_j = \overline{\lambda_j}$  לכן  $1 \leq j \leq n$ ;  $B = B^*$  אזי:

$$A^* = (U B U^*)^* = (U^*)^* B^* U^* = U B^* U^* = U B U^* = A$$

**הערה:** תהי  $A \in M_n(\mathbb{C})$  הרמטית כך ש  $1 \leq i, j \leq n; a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$U \in M_n(\mathbb{C}) \text{ אוניטרית } \lambda_j \in \mathbb{R} \quad U A U^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

האם ניתן לבחור  $U \in M_n(\mathbb{R})$ ? תשובה: כן  
 (תרגיל) טענת עזר: תהי A מטריצה סימטרית ויהי  $w \in \mathbb{C}^n$  וקטור עצמי של A, הוכיחו שקיים וקטור עצמי  $v \in \mathbb{R}^n$  המתאים לאותו הערך העצמי כמו w.

לפי טענת העזר ניתן לבנות מטריצה U כך שכל המטריצה תהיה ממשית.

לכסון ממשי של מטריצה נורמלית  $A \in M_n(\mathbb{C})$

- א. נרשום את כל הערכים העצמיים של A השונים זה מזה  
 $1 \leq k \leq n; \alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{C}$
- ב. נסמן  $V_j = \{v \in \mathbb{C}^n : Av = \alpha_j v\}$  ונבחר בכל  $V_j$  בסיס אורתונורמלי  $\Gamma_j$  (כמובן שזה אפשרי לפי תהליך גראהם שמידט)
- ג. נרשום את הבסיס המורכב מן הבסיס הנ"ל  $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2 \dots \Gamma_k = (v_1 \dots v_n)$
- ד. נסמן מטריצה  $P = \underbrace{(v_1 \dots v_n)}_{\text{columns}}$  אזי היא מטריצה אוניטרית וגם מתקיים

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}; Av_j = \lambda_j v_j$$

ה. נסמן  $U = P^{-1} = P^*$  ולכן  $U^* = P$  ונקבל  $UAU^* = B$  כאשר

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

כאשר U אוניטרית ו B אלכסונית.

**מקרה מיוחד:** נניח שמטריצה A היא ממשית וגם צמודה לעצמה כלומר היא סימטרית אזי כל הערכים העצמיים שלה  $1 \leq k \leq n; \alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{R}$  אזי אפשר להסתפק רק בוקטורים של  $\mathbb{R}^n$  כלומר להגדיר מרחב  $V_j = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \alpha_j v\}$   $1 \leq j \leq k$  ולהמשיך את התהליך כמו קודם, נקבל מטריצה  $U \in M_n(\mathbb{R})$  וגם  $B \in M_n(\mathbb{R})$  כלומר במקרה A סימטרית וגם ממשית, זה המקרה שלפנינו:

**הסבר:** נניח ש  $w \in \mathbb{C}^n$  הוא וקטור עצמי של A המתאים לאיזושהו ערך עצמי ממשי

$$w = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_u + i \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_v \Rightarrow u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{C}^n, w = u + iv$$

$$Aw = \alpha w \Rightarrow A(u + iv) = \alpha u + i\alpha v \Rightarrow Au + iAv = \alpha u + i\alpha v$$

כאשר לפחות אחד מבין u, v שונה מאפס.  $Au = \alpha u, Av = \alpha v \Rightarrow v \in \mathbb{R}^n$

דוגמה:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  מצאו מטריצה אוניטרית ממשית U ומטריצה אלכסונית B כך ש  $U^*AU = B$

### מטריצה (ריבועית) ממשית נורמלית

המטרה: למצוא  $B, U \in M_n(\mathbb{R})$  כך ש  $U$  אוניטרית ו  $B$  פשוטה מאוד. עד כמה פשוטה יכולה  $B$  להיות?

### מירכוב של מרחב אוקלידי

יהי  $V$  מרחב אוקלידי, כלומר מרחב בעל מימד סופי מעל  $\mathbb{R}$  בו מוגדרת מכפלה סקלרית נתונה מסוימת, נגדיר מרחב  $\hat{V}$  כקבוצה של כל הביטויים הפורמליים מן הצורה  $u, v \in V: u + iv$ .

$$(v_1 + iv_2) + (u_1 + iu_2) = (v_1 + u_1) + i(v_2 + u_2)$$

נגדיר חיבור:  $z \in \mathbb{C}$  כלומר  $z = x + iy$  אזי  $z \cdot (v_1 + iv_2) = (xv_1 + yv_2) + i(xv_2 + yv_1)$  כל מנת להוכיח שזהו מרחב לינארי מעל  $\mathbb{C}$  יש צורך להוכיח את כל התכונות של מרחבים לינאריים.

### הערות:

- אנו אומרים ש  $v_1 + iv_2 = u_1 + iu_2$  אם  $v_1 = u_1$  ו  $v_2 = u_2$ .
- סימון אם  $u, v \in V; w = u + iv$  נרשום  $\text{Re } w = u; \text{Im } w = v$   $\bar{w} = u - iv$ .
- אם  $v \in V$  אנו נוהה את  $v$  עם הביטוי הפורמלי  $v + i0$ , אז  $v$  אנו מניחים כי  $V \subset \hat{V}$ .

**טענה 1:** אם  $v_1 \dots v_k \in V$  קבוצה בת"ל אזי היא בת"ל גם ב  $\hat{V}$  (כאשר לגבינו  $\hat{v}_j = v_j + i0$ )

**הוכחה:** נרשום את המשוואה  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$  כאשר  $\alpha_j \in \mathbb{C}$   $1 \leq j \leq k$  אבל  $\alpha_j = a_j + ib_j$  ולכן המשוואה מקבלת את הצורה הבאה:  
 $(a_1 + ib_1)v_1 + \dots + (a_k + ib_k)v_k = 0$  שניתן לכותבה כמובן גם כ:  
 $(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k) + i(b_1 v_1 + \dots + b_k v_k) = 0 + i0$   $0 \in V$  כלומר קיבלנו בעצם שתי משוואות שבכל אחת מהם יש את  $K$  הוקטורים עם מקדמים מ  $\mathbb{R}$  ששכומם שווה ל  $0$  ולכן כל המקדמים הם  $0$  ונקבל כי גם  $\alpha_j = 0$   $1 \leq j \leq k$

**טענה 2:** אם  $v_1 \dots v_n$  בסיס של  $V$  אז הם גם בסיס של  $\hat{V}$ .

**הוכחה:** הוכחנו בטענה 1 שהם בת"ל נותר להוכיח שהם פורסים את המרחב  $\hat{V}$ , אכן אם  $w \in \hat{V}$  אזי  $w = v + iu$  כאשר  $u, v \in V$  לכן  $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j; u = \sum_{j=1}^n b_j v_j$   $a_j, b_j \in \mathbb{R}$

ולכן  $w = \sum_{j=1}^n a_j v_j + i \sum_{j=1}^n b_j v_j = \sum_{j=1}^n (a_j + ib_j) v_j$  כלומר ניתן להציג כל וקטור שרירותי  $w \in \hat{V}$  כצירוף לינארי של  $v_1 \dots v_n$

**מסקנה:**  $\dim V = \dim \hat{V}$  כאשר  $V$  מעל  $\mathbb{R}$  ו  $\hat{V}$  מעל  $\mathbb{C}$ .

נגדיר מכפלה הרמטית ב  $\hat{V}$  בעזרת המכפלה הסקלרית המוגדרת ב  $V$ .

יהיו  $w_1 = u_1 + iv_1; w_2 = u_2 + iv_2; w_1, w_2 \in \hat{V}$  נגדיר:

$$(w_1, w_2)_{\mathbb{C}} = (u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) + i((v_1, u_2) - (u_1, v_2))$$

נראה כי המכפלה החדשה הנה הרמטית:

ההעתקה אכן הרמטית ויתירה מזאת מתקיים:  $\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ .

**הגדרה:** תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית, נגדיר העתקה חדשה  $\hat{T}: \hat{V} \rightarrow \hat{V}$  על ידי

הנוסחה הבאה: אם  $w = u + iv$  אזי  $\hat{T}(w) = T(u) + iT(v)$

**טענה 1:**  $\hat{T}$  היא לינארית.

**הוכחה:**

**טענה 2:**

א. אם  $u_1, u_2 \in V$  אזי  $(u_1, u_2)_C = (u_1, u_2)$

ב. לכל  $w_1, w_2 \in \hat{V}$  מתקיים  $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$

ג. אם  $w \in \hat{V}$  אזי  $\overline{zw} = z\overline{w}$   $z \in \mathbb{C}$

ד. אם  $w \in \hat{V}$  אזי  $w + \overline{w} = 2\text{re}(w)$ ;  $w - \overline{w} = 2\text{Im}(w)$

ה. אם  $w_1, w_2 \in \hat{V}$  אז  $(\overline{w_1}, \overline{w_2})_C = \overline{(w_1, w_2)_C}$

ו.  $w = \overline{\overline{w}} \Leftrightarrow w \in V$

**הוכחות:**

**טענה 3:** תכונות של  $\hat{T}$

יהו  $S, T$  העתקות לינאריות מ  $V$  ל  $V$  אזי:

א.  $\widehat{T+S} = \widehat{T} + \widehat{S}$

ב. אם  $\alpha \in \mathbb{R}$  אזי  $\widehat{\alpha T} = \alpha \widehat{T}$

ג.  $\widehat{TS} = \widehat{T} \widehat{S}$

**הוכחת ג':** נסמן  $w = u + iv \in \hat{V}$  שרירותי אזי

$$\widehat{TS}(w) = TS(u) + iT(S(v)) = T(S(u)) + iT(S(v)) = \widehat{T}(S(u) + iS(v)) = \widehat{T}(\widehat{S}(w))$$

**טענה 4:** אם  $T: V \rightarrow V$  לינארית אזי  $\widehat{T^*} = (\widehat{T})^*$

**הוכחה:**

**טענה 5:** תהי  $I: V \rightarrow V$  העתקת הזהות של  $V$  אזי  $\widehat{I}$  היא העתקת הזהות של  $\hat{V}$

**הוכחה:** לכל  $w = u + iv \in \hat{V}$  מתקיים  $\widehat{I}(w) = I(u) + iI(v) = u + iv = w$

**תוצאה:**

א. אם  $T$  נורמלית אזי  $\widehat{T}$  נורמלית

ב. אם  $T$  אוניטרית אזי  $\widehat{T}$  אוניטרית

ג. אם  $T$  צמודה לעצמה אזי  $\widehat{T}$  הרמטית

**הוכחה:**

א.  $\widehat{(\widehat{T})^*} = \widehat{T} \widehat{T^*} = \widehat{TT^*} = \widehat{T^*T}$  וגם  $\widehat{(\widehat{T})^*} = \widehat{T^*} \widehat{T} = \widehat{T^*T} = \widehat{T^*T}$  לכן  $\widehat{(\widehat{T})^*} = \widehat{T} \widehat{T^*}$

ב. נתון  $T$  אוניטרית ז"א  $TT^* = I$  לכן  $\widehat{TT^*} = \widehat{I} = \widehat{I}$  לכן  $\widehat{TT^*} = \widehat{I} = \widehat{I}$  ז"א  $\widehat{T} \widehat{T^*} = \widehat{I}$

אוניטרית.

ג. אם  $T$  צמודה לעצמה אז  $T^* = T$  לכן  $\widehat{T}^* = \widehat{T}$  כנדרש.

**משפט 1:** תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית ויהי  $\alpha \in \mathbb{R}$  עייע של  $\widehat{T}$  (אם יש כזה) אזי  $\widehat{V}_\alpha = \{w \in \widehat{V} : \widehat{T}(w) = \alpha w\}$  יתירה מזאת קיים בסיס אינ של  $\widehat{V}_\alpha$  שמורכב כולו מוקטורים של  $V$ .

**הוכחה:** אם  $\alpha$  הוא עייע של  $\widehat{T}$  אזי קיים  $0 \neq w \in \widehat{V}$  כך ש  $\widehat{T}(w) = \alpha w$  נרשום

אזי  $w = u + iv$   $\widehat{T}(u + iv) = \alpha(u + iv) \Rightarrow T(u) + iT(v) = \alpha u + i\alpha v$  אבל לפחות אחד מן  $T(u), T(v), \alpha u, \alpha v \in V$  ולכן  $\alpha \in \mathbb{R}$

והוקטורים  $u, v$  שונה מאפס (כי  $w$  שונה מאפס) ולכן  $\alpha$  הוא עייע של  $T$ . נסמן  $V_\alpha = \{v \in V : T(v) = \alpha v\}$  בהתאם לתהליך גראהם שמידט נבחר ב  $V_\alpha$  בסיס אינ

$v_1, \dots, v_k$  אזי  $\widehat{T}(v_i) = T(v_i) = \alpha v_i$  לכל  $1 \leq i \leq k$  לכן  $v_i \in \widehat{V}_\alpha$  אם  $i \neq j$  אזי  $(v_i, v_j)_C = (v_i, v_j) = 0$  אם  $i = j$  אזי  $(v_i, v_i)_C = (v_i, v_i) = 1$  לכן הם מערכת

אורתונורמלית ב  $\widehat{V}_\alpha$  בפרט היא בת"ל.

נראה כי היא פורסת את  $\widehat{V}_\alpha$ , יהי  $w = u + iv \in \widehat{V}_\alpha$  שרירותי הוכחנו קודם כי מתקיים

לכן  $T(u) = \alpha u; T(v) = \alpha v$  לכן  $u, v \in V_\alpha$  כלומר  $u = \sum_{i=1}^k a_i v_i; v = \sum_{i=1}^k b_i v_i$  לכן  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

לכן  $w = \sum_{i=1}^k a_i v_i + i \sum_{i=1}^k b_i v_i = \sum_{i=1}^k (a_i + ib_i) v_i$  לכן  $v_1, \dots, v_k$  פורסים את  $\widehat{V}_\alpha$  ומהווים בסיס אינ כנדרש.

**משפט 2:** בתנאים של המשפט הקודם אם  $\lambda \notin \mathbb{R}$  הוא עייע של  $\widehat{T}$  אזי גם  $\bar{\lambda}$  הוא עייע של  $\widehat{T}$ , יתירה מזאת אם  $v_1, \dots, v_k$  הוא בסיס אינ של  $\widehat{V}_\lambda$  אזי  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$  הוא בסיס אינ של  $\widehat{V}_{\bar{\lambda}}$

**הוכחה:** אם  $\lambda = a + ib$  כאשר  $a, b \in \mathbb{R}$  ו  $b \neq 0$  הוא ערך עצמי של  $\widehat{T}$  אזי קיים

$w = u + iv \in \widehat{V}$  כך ש  $\widehat{T}(w) = \lambda w$  לכן  $\widehat{T}(w) = \lambda w = \bar{\lambda} \bar{w} = \overline{\lambda w} = \overline{\widehat{T}(w)} = T(u) - iT(v) = \widehat{T}(\bar{w})$

לכן  $\bar{\lambda}$  הוא עייע של  $\widehat{T}$  וגם אם  $w$  וייע המתאים ל  $\lambda$  אזי  $\bar{w}$  וייע המתאים ל  $\bar{\lambda}$ . המשך הוכחה: תרגיל.

**משפט 3:** תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה נורמלית כאשר  $V$  הוא מרחב אוקלידי בעל מימד סופי אזי קיים בסיס אינ של  $V$  כך שהמטריצה המייצגת את  $T$  ביחס לבסיס זה

היא מן הצורה  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_m & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$  כאשר  $1 \leq i \leq m; \lambda_i \in \mathbb{R}$

ו  $A_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  ו  $m + 2k = n$  וכן מתקיים  $1 \leq j \leq k$

תרגול :

**משפט:** בהנתן מטריצה רגולרית  $A$  קיים פירוק שלה לאוניטרית וצמודה לעצמה.

**הוכחה:** נתבונן במטריצה  $AA^*$  מטריצה זו הנה מטריצה צמודה לעצמה (ולכן גם נורמלית) מכיוון ש  $(AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^*$  לכן קיים לה פירוק  $AA^* = UBU^*$  כאשר  $U$  אוניטרית ו  $B$  אלכסונית.

**טענה:** עבור כל  $T$  ט"ל צמודה לעצמה כל ערך עצמי של  $T$  הוא ממשי  $0 \leq$ .

בנוסף, אם  $A$  רגולרית אזי גם  $A^*$  רגולרית ולכן  $\text{Ker}(AA^*) = 0$

יהי  $v$  ו"ע של  $AA^*$  עם ע"ע  $\lambda$  אזי מתקיים

$$0 < \underbrace{(A^*v, A^*v)}_{v \neq 0 \Rightarrow A^*v \neq 0} = (AA^*v, v) = (\lambda v, v) = \lambda(v, v) \Rightarrow \lambda > 0$$

מטריצה  $B$  היא מן הצורה  $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$  נגדיר  $S^* = S = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$  ניתן

להגדיר זאת כי הוכחנו שכל הערכים העצמיים חיוביים וממשיים.

$$AA^* = \underbrace{US}_{R} \underbrace{S^*U^*}_{R^*}; A = \underbrace{RR^{-1}}_I A$$

**טענה:**  $R^{-1}A$  אוניטרית.

**הוכחה:**  $(R^{-1}A)(R^{-1}A)^* = R^{-1}AA^*(R^{-1})^* = \underbrace{S^{-1}U^{-1}}_{R^{-1}} \underbrace{USS^*U^*}_{AA^*} \underbrace{(U^{-1})^*(S^{-1})^*}_{(R^{-1})^*} = I$  ולכן נוכל

כעת לרשום  $A = \underbrace{RR^{-1}}_I A = RU^*UR^{-1}A$  כאשר  $UR^{-1}A$  אוניטרית ככפל של מטריצות

אוניטריות.

**טענה:**  $RU^*$  צמודה לעצמה.

**הוכחה:**  $RU^* = USU^* \Rightarrow (RU^*)^* = (USU^*)^* = (U^*)^* S^* U^* = USU^*$

ולכן הראנו פירוק של כל מטריצה  $A$  רגולרית לאוניטרית וצמודה לעצמה.

## צורת ג'ורדן

### סכומים ישרים

**הגדרה:** יהי  $V$  מרחב לינארי מעל  $F$  ויהיו  $U_1 \dots U_m$  תתי מרחבים של  $V$ . נאמר שתת מרחב  $W$  של  $V$  הוא סכום  $U_1 \dots U_m$  אם לכל וקטור  $w \in W$  קיימים  $1 \leq i \leq m; u_i \in U_i$  כך ש  $w = \sum_{i=1}^m u_i$ . אם קיימת סדרה יחידה של וקטורים כאלו המקיימים  $w = \sum_{i=1}^m u_i$  אזי נאמר ש  $W$  הוא סכום ישר של  $U_1 \dots U_m$ .

$$W = \bigoplus_{i=1}^m U_i \quad \text{סימון:}$$

**טענה 1:** יהי  $V$  מרחב לינארי מעל  $F$  ויהיו  $U_1 \dots U_m$  תתי מרחבים של  $V$  אזי  $W$  הוא סכום ישר של  $U_1 \dots U_m$  אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

$$\text{ii. לכל } 1 \leq i \leq m \text{ מתקיים } \left( \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} U_j \right) \cap U_i = \{0\}$$

**הוכחה:**  $\Leftarrow$  נניח ש  $W$  הוא סכום ישר של  $U_1 \dots U_m$  אזי  $W$  הוא סכום שלהם לפי

ההגדרה. נניח בדרך השלילה כי  $\left( \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} U_j \right) \cap U_i \neq \{0\}$  אזי קיים  $w \neq 0$  כך ש  $w \in U_i$

וגם  $w \in \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} U_j$  אזי ניתן להציג אותו כ  $w = 0 + 0 + \dots + w + 0 + \dots + 0$  כלומר

$$w = \sum_{j=1}^m v_j \quad \text{וגם} \quad w = \sum_{j=1}^m u_j$$

$v_i = 0; v_j \in U_j$                        $u_i = w; j \neq i, u_j = 0$

$0 = v_i \neq u_i = w$  בסתירה להנחה ש  $W$  סכום ישר של  $U_1 \dots U_m$ .

$\Rightarrow$  נניח כי לכל  $1 \leq i \leq m$  מתקיים  $\left( \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} U_j \right) \cap U_i = \{0\}$  וגם  $W$  הוא סכום של

$U_1 \dots U_m$ . נניח כי עבור  $w \in W$  מסוים מתקיים  $w = \sum_{i=1}^m u_i$  וגם  $w = \sum_{i=1}^m v_i$  כאשר

$1 \leq i \leq m; u_i, v_i \in U_i$  אזי  $(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \dots + (u_m - v_m) = 0$  נניח בדרך השלילה כי

$u_i - v_i \neq 0$  עבור  $i$  מסוים אזי  $u_i - v_i = \sum_{i \neq j=1}^m -(u_j - v_j) \in \sum_{i \neq j=1}^m U_j$  אבל  $u_i - v_i \in U_i$  ולכן

$u_i - v_i = 0$  בסתירה להנחה.

**טענה 2:** יהיו  $U_1 \dots U_m$  תתי מרחבים של  $V$  ויהיו  $\Gamma_i$  בסיסים של  $U_i$ . נגדיר קבוצת וקטורים  $\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_m = (v_1, v_2, \dots, v_k) = (\underbrace{v_1 \dots v_{m_1}}_{\Gamma_1} \underbrace{v_{m_1+1} \dots v_{m_2}}_{\Gamma_2} \dots v_{(m-1)} \underbrace{v_{(m-1)+1} \dots v_{m_m}}_{\Gamma_m})$  אזי  $W$

הוא סכום ישר של  $U_1 \dots U_m$  אם ורק אם  $\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_m$  הוא בסיס של  $W$   
הערה: יהי  $1 \leq j \leq m$   $m_j = \dim U_j$  נסמן  $n_1 = m_1, n_2 = m_1 + m_2, \dots, n_l = n_{l-1} + m_l$  אזי

$$n_m = \sum_{j=1}^m m_j \quad \text{הם } v_{m_{l-1}+1}, \dots, v_{n_l} \text{ של } \Gamma_l$$

**הוכחה:** נניח ש  $W$  הוא סכום ישר של  $U_1 \dots U_m$  אזי לכל  $w \in W$  קיים

$$w = \sum_{i=1}^m u_i \quad \text{כך ש } 1 \leq i \leq m; u_i \in U_i \quad \text{אזי } u_i \in U_i = sp(\Gamma_i) \subseteq sp(v_1 \dots v_{n_m})$$

$$\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_m \text{ פורסת את } W \text{ נרשום את המשוואה } \sum_{i=1}^{n_m} a_i v_i = 0 \text{ אזי נקבל}$$

$$0 = \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_{n_1} v_{n_1}}_{u_1} + \underbrace{a_{n_1+1} v_{n_1+1} + \dots + a_{n_2} v_{n_2}}_{u_2} + \dots + \underbrace{a_{n_{m-1}+1} v_{n_{m-1}+1} + \dots + a_{n_m} v_{n_m}}_{u_m}$$

נסמן  $u_l = \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_l} a_j v_j$  כלומר  $\sum_{l=1}^m u_l = 0$  דהיינו  $u_l \in U_l$  אבל גם  $0=0+0+\dots+0$  אבל  $W$

הוא סכום ישר של  $U_1 \dots U_m$  וכמוכן ש  $0$  שייך ל  $W$  לכן יש לו הצגה יחידה ולפיכך

$$0 = \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_l} a_j v_j = 0 \quad \text{ונקבל } 1 \leq l \leq m; u_l = 0 \quad \text{כאשר } v_j \text{ אלו בת"ל כי הם אברי בסיס ולכן}$$

$a_j = 0$  לכן כל המקדמים ברשימה המוקרית שווים לאפס כלומר כל הוקטורים ברשימה המקורית בת"ל ולכן מכיוון שכבר הוכחנו שהם פורסים הם בסיס של  $W$ .  
 $\Rightarrow$  נניח כי  $\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_m = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  בסיס של  $W$  אזי כל וקטור  $w \in W$  ניתן

$$\text{להצגה } \sum_{i=1}^{n_m} a_i v_i \text{ נסמן כמו קודם:}$$

$$w = \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_{n_1} v_{n_1}}_{u_1} + \underbrace{a_{n_1+1} v_{n_1+1} + \dots + a_{n_2} v_{n_2}}_{u_2} + \dots + \underbrace{a_{n_{m-1}+1} v_{n_{m-1}+1} + \dots + a_{n_m} v_{n_m}}_{u_m}$$

נסמן  $u_l = \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_l} a_j v_j$  כלומר  $w = \sum_{l=1}^m u_l$  כלומר כל וקטור של  $W$  ניתן להצגה כסכום

$$\text{של } U_1 \dots U_m \text{ (צריך להוכיח שאם } w = \sum_{l=1}^m u_l \text{ אזי } w \in W \text{ - תרגיל)}$$

נניח שעבור  $w \in W$  קיימת הצגה  $w = \sum_{l=1}^m w_l$  כאשר  $1 \leq l \leq m; w_l \in U_l$  אזי ניתן לרשום

$$w = \sum_{l=1}^m w_l = \sum_{j=1}^{n_m} b_j v_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n_m} a_j v_j = \sum_{j=1}^{n_m} b_j v_j \quad \text{אזי } w_l = \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_l} b_j v_j$$

כלומר  $1 \leq j \leq n_m; a_j = b_j$  ולכן ההצגה של  $w$  יחידה.

**טענה 3:** יהי  $W = \bigoplus_{l=1}^m U_l$  אזי  $\dim W = \sum_{l=1}^m \dim U_l$

**הוכחה:** יהו  $1 \leq l \leq m; \Gamma_l$  בסיסים של  $U_l$  אזי לפי טענה 2  $\Gamma_1 \dots \Gamma_m$  בסיס של  $W$  ולכן  $\dim W = \sum_{l=1}^m \dim U_l$  כנדרש.

**טענה 4:** נניח ש  $W = \sum_{l=1}^m U_l$  וגם  $\dim W = \sum_{l=1}^m \dim U_l$  אזי  $W = \bigoplus_{l=1}^m U_l$

**הוכחה:** כל  $w \in W$  ניתן להצגה  $w = \sum_{l=1}^m u_l$  כאשר  $1 \leq l \leq m; u_l \in U_l$  אבל כל  $w \in sp(\Gamma_1 \dots \Gamma_m)$  ולכן ברור כי  $u_i \in U_i = sp(\Gamma_i) \subseteq sp(\Gamma_1 \dots \Gamma_m)$  לכן  $\Gamma_1 \dots \Gamma_m$  פורסת את  $W$  אבל מספר הוקטורים ב  $\Gamma_1 \dots \Gamma_m$  הוא בדיוק  $\sum_{l=1}^m \dim U_l$  ולכן  $\Gamma_1 \dots \Gamma_m$  בסיס של  $W$  ולפי טענה 2  $W = \bigoplus_{l=1}^m U_l$ .

**טענה 5:** נניח ש  $1 \leq l \leq m; U_l \subset W$  כך ש  $\dim W = \sum_{l=1}^m \dim U_l$  וגם לכל  $1 \leq i \leq m$

$$\text{מתקיים } \left( \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} U_j \right) \cap U_i = \{0\} \text{ אזי } W = \bigoplus_{l=1}^m U_l$$

### מטריצות בלוקים

**הגדרה:** תהי  $A \in M_n(F)$  ותהי  $1 \leq k \leq m; A_k$  סדרה של מטריצות כך ש  $A_k \in M_{n_k}(F)$  נגדיר מספרים  $l_0 = 0, l_1 = n_1, l_2 = n_1 + n_2, \dots, l_k = l_{k-1} + n_k$  בפרט  $l_m = n$  כי  $\sum_{k=1}^m n_k = n$  כאשר האיברים של  $A$  הנמצאים בשורות ועמודות בעלי המספר הסידורי בין  $l_{k-1} + 1$  ל  $l_k$  הם אברי  $A_k$  בהתאם לסדר. במקרה שכזה אנו אומרים ש  $A$  היא מטריצת

$$. A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_m \end{pmatrix} \text{ בלוקים מן הצורה}$$

$$\text{אזי } A_k = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & \dots & b_{1n_k}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_k 1}^{(k)} & \dots & b_{n_k n_k}^{(k)} \end{pmatrix} \text{ הערה: נרשום את } A_k \text{ בצורה מפורשת}$$

$$. 1 \leq i, j \leq n_k \Rightarrow a_{l_{k-1}+i, l_{k-1}+j} = b_{ij}^{(k)}$$

**משפט:** יהי  $V$  מרחב לינארי מעל  $F$  ויהיו  $1 \leq k \leq m; U_k$  ת"מ של  $V$  כך ש  $W = \bigoplus_{i=1}^m U_i$

(בפרט אם  $n_k = \dim U_k$  אזי  $\sum_{k=1}^m n_k = n$  כאשר  $\dim V = n$ ) תהי  $T: V \rightarrow V$  לינארית כך

שכל  $1 \leq k \leq m; U_k$  אינווריאנטים לגבי  $T$  נבחר בכל  $1 \leq k \leq m; U_k$  בסיס  $\Gamma_k$  ונבנה

$$\text{בסיס של } V \text{ בדרך הרגילה } \Gamma = \Gamma_1 \dots \Gamma_m \text{ אזי } A = [T]_{\Gamma} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_m \end{pmatrix} \text{ כאשר}$$

$$1 \leq k \leq m, A_k = [T_{U_k}]_{\Gamma_k}$$

$$\text{הוכחה: נרשום את } A_k = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & \dots & b_{1n_k}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_k 1}^{(k)} & \dots & b_{n_k n_k}^{(k)} \end{pmatrix} \text{ המטרה היא להראות כי}$$

$1 \leq i, j \leq n_k \Rightarrow a_{i, k-1+i, k-1+j} = b_{ij}^{(k)}$  ושאר האברים באותן השורות והעמודות הם אפסים.

נסמן וקטורי  $\Gamma_k$  בצורה הבאה  $v_1^{(k)}, \dots, v_{n_k}^{(k)}$  ז"א אם  $\Gamma = v_1 \dots v_n$  אזי

$$T(v_j^{(k)}) = T_{U_k}(v_j^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n_k} b_{ij}^{(k)} v_i^{(k)} \text{ נקבל } A_k \text{ לפי הגדרת מטריצה } 1 \leq j \leq n_k \Rightarrow v_j^{(k)} = v_{i_{k-1+j}}$$

כמו כן לפי הגדרה של  $A$  נקבל  $T(v_j^{(k)}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$  עבור וקטורים

בין  $l_{k-1} + 1$  לבין  $l_k$  ונקבל  $T(v_{i_{k-1+j}}) = \sum_{i=1}^n a_{i, l_{k-1}+j} v_i$  ובגלל יחידות ההצגה נקבל כמסקנה

כי כל המקדמים  $a_{ij}$  שאנם מתאימים לוקטורים של  $\Gamma_k$  הם אפסים. ואז נקבל

$$T(v_{i_{k-1+j}}) = \sum_{i=1}^n a_{i, l_{k-1}+j} v_{i_{k-1}+i} \text{ כלומר } a_{i, l_{k-1}+j} = b_{ij}^{(k)} \text{ כנדרש.}$$

## תת מרחבים $T$ ציקליים.

**הגדרה:** יהי  $V$  מרחב לינארי מעל  $F$   $T: V \rightarrow V$  לינארית ויהי  $v \in V$  וקטור נתון השונה מאפס. נתון כי  $\dim V = n$  ונתבונן בסדרת וקטורים  $v, T(v), T^2(v), \dots, T^{n-1}(v)$

אזי הם תלויים לינארית נמצא  $k$  מינימלי כך ש  $v, T(v), T^2(v), \dots, T^k(v)$  תלוייה

לינארית אזי  $k \leq n$ , אזי  $v, T(v), T^2(v), \dots, T^{k-1}(v)$  היא סדרה בת"ל של  $k$  וקטורים.

אזי  $T^k(v)$  הוא צ"ל של  $v, T(v), T^2(v), \dots, T^{k-1}(v)$  נסמן

$U = \text{sp}(v, T(v), T^2(v), \dots, T^{k-1}(v))$  אזי  $U$  נקראת תת מרחב  $T$  ציקלי.

**טענה 1:** לכל  $j \geq 0$   $T^j(v) \in U$

**הוכחה:**  $0 \leq j \leq k-1$  טריויאלי. לגבי  $T^k(v)$  הראנו כי הוא צ"ל של

$v, T(v), T^2(v), \dots, T^{k-1}(v)$  ולכן הוא שייך ל  $U$ , עבור  $j > k$  נוכיח באידוקציה.

ניח ש  $T^j(v) \in U$  אזי  $T^j(v) = a_1 v + a_2 T(v) + a_3 T^2(v) + \dots + a_k T^{k-1}(v)$  ולכן

$T^{j+1}(v) \in U$  גם ולכן  $T^{j+1}(v) = a_1 T(v) + a_2 T^2(v) + a_3 T^3(v) + \dots + a_{k-1} T^{k-1}(v) + a_k T^k(v)$

**טענה 2:** U הוא אינווריאנטי.

**הוכחה:** אם  $u \in U$  אזי  $u = \sum_{i=0}^{k-1} a_i T^i(v)$  ולכן

$$T(u) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i T^{i+1}(v) = a_0 T(v) + \dots + a_{k-1} T^k(v).$$

**טענה 3:** בסיומנים של הטענות הקודמות נסמן  $v_j = T^{k-j}(v)$  ז"א

כי  $v_1 = T^{k-1}(v), v_2 = T^{k-2}(v), \dots, v_k = T^0(v) = v$  היא בסיס של U ונקבל כי

$$[T_U]_{\Gamma} = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ c_{k-1} & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ c_k & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**הוכחה:** נסמן  $T(v_1) = T^k(v) = \sum_{i=1}^k c_i v_i$  ולכן העמודה הראשונה הנה  $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$

באופן כללי לכך  $2 \leq j \leq k$  מתקיים  $T(v_j) = T(T^{k-j}(v)) = T^{k-j+1}(v) = T^{k-(j-1)}(v) = v_{j-1}$

ולכן העמודה ה- $j$  היא תמיד העמודה ה- $j-1$  ונקבל את המטריצה  $e_{j-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

שבטענה.

## העתקות נילפונטיות

**הגדרה:** אנו אומרים ש  $T: V \rightarrow V$  נילפוטנטית אם  $T^k = 0$  עבור  $k \geq 1$  מסוים (k זה יקרא אינדקס הנילפוטנטיות של T) בדומה אם מטריצה  $A^k = 0$  אזי A נילפוטנטית.

**תכונות מיידייות:**

1. T נילפוטנטית אם ורק אם העי"ע היחיד של T הוא אפס.
2. הפולינום האופייני של T הוא  $f(t) = t^n$  כאשר  $n = \dim V$
3. הפולינום המינימלי של T הוא  $m(t) = t^r$  ולכן  $1 \leq r \leq n$ ; הוא אינדקס הנילפוטנטיות של T.

**טענה 1:** אם r הוא אינדקס הנילפוטנטיות של T,  $v \in V$  כזה ש  $T^{r-1}(v) \neq 0$  אזי הקבוצה  $U = \text{sp}(v, T(v), T^2(v), \dots, T^{r-1}(v))$  היא T ציקלית.

**הוכחה:** נוכיח ש  $v, T(v), T^2(v), \dots, T^{r-1}(v)$  בת"ל. נרשום את המשוואה  $a_1 v + a_2 T(v) + a_3 T^2(v) + \dots + a_r T^{r-1}(v) = 0$  נוכיח ש  $a_1 = 0$ . אכן נפעיל על שני האגפים במשוואה ונקבל כי  $a_1 T^{r-1}(v) + a_2 T^r(v) + a_3 T^{r+1}(v) + \dots + a_r T^{2r-2}(v) = 0$  כלומר  $a_1 T^{r-1}(v) = 0$  ולכן  $a_1 = 0$  כי  $T^{r-1}(v) \neq 0$ . נניח שהוכחנו כי  $a_1 \dots a_j$  הם אפסים ונוכיח ש  $a_{j+1}$  גם אפס, אכן נקבל מהנחת האידוקציה  $a_{j+1} T^j(v) + \dots + a_r T^{r-1}(v) = 0$  נפעיל על שני האגפים  $T^{r-j-1}$  ונקבל כי  $a_{j+1} = 0$  כי  $T^{r-1}(v) \neq 0$ .  
בת"ל ו  $T^k(v) = 0$  צירוף לינארי שלהם לכן  $U = \text{sp}(v, T(v), T^2(v), \dots, T^{r-1}(v))$  היא T ציקלית כנדרש.

**טענה 2:** בתנאים של הטענה הקודמת, נסמן  $\Gamma = v_1 \dots v_k$  כאשר  $v_j = T^{k-j}(v)$  אזי

$$[T_U]_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ היא בסיס של } U \text{ ונקבל כי}$$

$$[T_U]_{\Gamma} = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ c_{k-1} & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ c_k & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ הוכחה: לפי התזכורת המטריצה צריכה להראות}$$

כאשר  $T^r(v) = \sum_{i=1}^k c_i v_i$  אבל במקרה שלנו  $T^r = 0$  ולכן  $c_j = 0$   $1 \leq j \leq k$

**תוצאה של טענה 1:** יהי  $V$  מרחב  $n$  מימדי מעל  $F$   $T: V \rightarrow V$  נילפוטנטית אזי קיים תת מרחב  $T$  ציקלי  $r$  מימדי של  $V$  אחד לפחות כאשר  $r$  הוא אינדקס הנילפוטנטיות של  $T$ .

**הוכחה:** אם  $r$  הוא אינדקס הנילפוטנטיות של  $T$  אזי קיים  $v \in V$  כזה ש  $T^{r-1}(v) \neq 0$  אזי לפי טענה 1 הקבוצה  $U = \text{sp}(v, T(v), T^2(v), \dots, T^{r-1}(v))$  היא  $T$  ציקלית.

**משפט:** יהי  $V$  מרחב לינארי מעל  $F$  כך ש  $\dim V = n$ ,  $T: V \rightarrow V$  נילפוטנטית ובעלת אינדקס הנילפוטנטיות  $r$ . ויהי  $U$  תת מרחב  $T$  ציקלי  $r$  מימדי אזי קיים תת מרחב  $W$  של  $V$  שהוא אינווריאנטי לגבי  $T$  כך ש  $V = U \oplus W$ .

**הערה:** אם  $U$  תת מרחב כלשהו של  $V$  אזי תמיד ניתן לבחור בסיס כלשהו  $v_1 \dots v_k$  של  $U$  ולהשלים אותו עד לבסיס של  $V$ :  $v_1 \dots v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$  ואזי אם נסמן  $W = \text{sp}(v_{k+1}, \dots, v_n)$  נקבל כי  $V = U \oplus W$ , כל הקושי הוא למצוא  $W$  שיהיה  $T$  אינווריאנטי.

נוכיח קודם כל מספר טענות עזר:

**טענת עזר 1:** נסמן  $V_1 = \text{Im} T$  (ברור ש  $V_1$  אינווריאנטי לגבי  $T$ ) נגדיר  $T_1: V_1 \rightarrow V_1$  על ידי הנוסחה:  $T_1 = T|_{V_1}$  אזי  $T_1$  נילפוטנטית בעלת אינדקס הנילפוטנטיות  $r-1$ .  
**הוכחה:** אם  $v_1 \in V_1$  אזי  $v_1 = T(v)$  עבור  $v \in V$  מסוים. לכן  $T_1^{r-1}(v_1) = T^{r-1}(v_1) = T^r(v) = 0$  אבל קיים  $v_0 \in V$  כך ש  $T^{r-1}(v_0) \neq 0$  (כי אינדקס הנילפוטנטיות הוא  $r$ ) נסמן  $v_1 = T(v_0)$  אזי  $v_1 \in V_1$  וגם  $T_1^{r-2}(v_1) = T^{r-2}(v_1) = T^{r-1}(v_0) \neq 0$  ולכן אינדקס הנילפוטנטיות של  $T_1$  הוא  $r-1$  כנדרש.

**טענת עזר 2:** בתנאים של הטענה הקודמת, יהי  $U$  תת מרחב  $T$  ציקלי  $r$  מימדי של  $V$ . דהיינו  $U = \text{sp}(v, T(v), T^2(v), \dots, T^{r-1}(v))$  כאשר  $T^{r-1}(v) \neq 0$  אזי תת מרחב  $U_1 = \text{sp}(T(v), T^2(v), \dots, T^{r-1}(v))$  הוא תת מרחב  $T_1$  ציקלי  $r-1$  מימדי של  $V_1$  יתירה מזאת אם  $u \in U$  אזי  $T(u) \in U_1$  ואם  $u_1 \in U_1$  אזי קיים  $u \in U$  כך ש  $u_1 = T(u)$ .

**הוכחה:** נסמן  $u = T(v) \in V_1$  אזי

$$U_1 = \text{sp}(T_1(v), T_1^2(v), \dots, T_1^{r-1}(v)) = \text{sp}(u, T_1(u), T_1^2(u), \dots, T_1^{r-2}(u))$$

לכן  $T_1^{r-2}(u) = T^{r-1}(u) \neq 0$  והוא תת מרחב  $T$  ציקלי  $r-1$  מימדי של  $V_1$ . יתירה

$$\text{מזאת נניח ש } w \in U \text{ ז"א } w = \sum_{j=0}^{r-1} a_j T^j(v) \text{ אזי } T(w) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j T^{j+1}(v) \in U_1$$

בכיוון השני, נניח  $u_1 \in U_1$  אזי  $u_1 = \sum_{j=1}^{r-1} a_j T^j(v)$  ולכן  $u_1 = T\left(\sum_{j=0}^{r-2} a_{j+1} T^j(v)\right)$  כלומר

$$u = \sum_{j=0}^{r-2} a_{j+1} T^j(v) \in U \text{ כאשר } u_1 = T(u) \text{ כנדרש.}$$

**טענת עזר 3:** בתנאים של הטענה הקודמת אם  $u \in U$  ו  $T(u) = 0$  אזי  $u \in U_1$

**הוכחה:** אם  $u \in U$  אזי  $u = \sum_{j=0}^{r-1} a_j T^j(v)$  ואזי  $T(u) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j T^{j+1}(v) = 0$  כלומר

$$a_0 T(v) + \dots + a_{r-2} T^{r-1}(v) + \underbrace{a_{r-1} T^r(v)}_0 = 0$$

אבל  $a_0 T(v) + \dots + a_{r-2} T^{r-1}(v) = 0$  ונקבל כמסקנה כי  $u = a_{r-1} T^{r-1}(v) \in U_1$  כנדרש.

**הוכחת המשפט:** נוכיח את המשפט באינדוקציה לפי  $r$ .

**בסיס:** אם  $r=1$  אזי  $T^1 = T = 0$ , נשלים את  $U$  באופן שרירותי ע"י ת"מ  $W$  כלשהו כך ש  $V = U \oplus W$ , אם  $v \in W$  אזי  $T(v) = 0$  כמובן שייך גם הוא ל  $W$  ולכן  $W$  הוא אינוריאנטי.

**הנחה:** נניח שטענת המשפט נכונה עבור כל מרחב  $V$ , כל העתקה  $T$  נילפוטנטית בעלת אינדקס הנילפוטנטיות  $r-1$  וכל תת מרחב  $T$  ציקלי  $r-1$  מימדי.

**צעד:** יהי  $V$  מ"ו מעל  $F$  ו  $T: V \rightarrow V$  נילפוטנטית בעלת אינדקס הנילפוטנטיות  $r$ , ויהי  $U$  ת"מ של  $V$  שהוא  $T$  ציקלי  $r$  מימדי. לפי טענות העזר 1 ו 2  $T_1: V_1 \rightarrow V_1$  כאשר  $V_1 = \text{Im} T$  היא בעלת אינדקס הנילפוטנטיות  $r-1$  ו  $U_1$  הוא  $T_1$  ציקלי  $r-1$  מימדי. לכן לפי הנחת האינדוקציה, קיים תת מרחב  $W_1$  של  $V_1$  שהוא  $T_1$  אינוריאנטי כך ש  $V_1 = U_1 \oplus W_1$ .

נגדיר  $(1) W_0 = \{v \in V : T(v) \in W_1\}$  אם  $v \in W_1$  אזי  $T(v) \in W_1$  ולכן  $v \in W_0$  לכן  $W_1 \subseteq W_0$ . אם  $v \in W_0$  אזי  $T(v) \in W_1 \subseteq W_0$ . מסקנה:  $(2) W_0$  הוא  $T$  אינוריאנטי.

נוכיח  $(3) V = W_0 + U$ :

יהי  $v \in V$  אזי  $T(v) \in V_1$  ולכן  $T(v) = u_1 + w_1$  כאשר  $u_1 \in U$ ;  $w_1 \in W_1$  לפי טענת עזר 2 קיים  $u \in U$  כך ש  $u_1 = T(u)$ . נרשום  $v = u + (v - u)$  אזי  $T(v - u) = T(v) - T(u) = (u_1 + w_1) - u_1 \in W_1$  לכן לפי (1)  $v - u \in W_0$  ו  $u \in U$  כלומר כל וקטור של  $V$  ניתן לרשום כסכום של וקטורי  $U$  ו  $W_0$  כנדרש ולכן (3) מתקיים.

נוכיח  $(4) U \cap W_1 = \{0\}$ :

אם  $u \in U \cap W_1$  אזי  $u \in U$  וגם  $u \in W_1$ , לכן לפי טענת עזר 2  $T(u) \in U_1$ . גם  $T(u) \in W_1$  כי  $T(u) = T_1(u)$  ו  $W_1$  הוא  $T_1$  אינוריאנטי לכן  $T(u) \in U_1 \cap W_1$  לכן  $T(u) = 0$  כי  $U_1 \cap W_1 = \{0\}$  לפי טענת עזר 3, לכן  $u \in U_1 \cap W_1 = \{0\}$  כלומר  $U \cap W_1 = \{0\}$  כנדרש.

אזי  $(5) (U \cap W_0) \cap W_1 \subseteq U \cap W_1 = \{0\}$

נגדיר  $W_2 = \{v_1 + v_2 : v_1 \in U \cap W_0, v_2 \in W_1\}$  ז"א  $W_2 = (U \cap W_0) \oplus W_1$  אבל:  $W_2 \subseteq W_0$ ,  $U \cap W_0 \subseteq W_0$ ,  $W_1 \subseteq W_0$  לכן  $W_2 \subseteq W_0$  תמיד ניתן לבחור תת מרחב  $W_3$  של  $W_0$  כך ש  $W_0 = W_2 \oplus W_3$  לפי (7) ו(6) ניתן לכתוב  $W_0 = (U \cap W_0) \oplus W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3$  נסמן  $W = W_1 \oplus W_3$  אזי  $W_0 = (U \cap W_0) \oplus W$  לפי (8)  $W$  זה הוא ה  $W$  המבוקש.  $W_3 \subseteq W_0$  לפי (7)  $W_1 \subseteq W_0$  - מהגדרה של  $W_0$  לכן  $W_1 \subseteq W \subseteq W_0$  לפי ההגדרה של  $W$ . נבדוק כי מתקיימות כל הדרישות:

1.  $W$  הוא  $T$  אינווריאנטי - אכן אם  $v \in W$  אזי  $v \in W_0$ , לכן  $T(v) \in W_1 \subseteq W$  לפי (8)
2.  $W \cap U = (W \cap W_0) \cap U = W \cap (W_0 \cap U) = \{0\}$
3. נוכיח ש  $V = W \oplus U$ , הוכחנו קודם ש  $V = W_0 + U$ , לכן אם  $v \in V$  אזי  $v = u + w_0$  כאשר  $u \in U; w_0 \in W_0$  אבל לפי (8)  $w_0 = u_1 + w$  כאשר  $u_1 \in (U \cap W_0) \subset U; w \in W$  ולכן  $v = u_1 + u + w$  כאשר  $u + u_1 \in U; w \in W$  לכן  $V = U + W$  כנדרש.

### צורת Jordan של מטריצה נילפוטנטית:

יהי  $V$  מ"ו מעל  $F$ , כך ש  $\dim V = n$ ,  $T: V \rightarrow V$  נילפוטנטית ובעלת אינדקס הנילפוטנטיות  $r_1$  אזי:

א. ניתן לרשום את  $V$  בצורה  $V = \bigoplus_{j=1}^m U_j$  כאשר  $U_j$  הם תת מרחבים  $T$  ציקליים של

$V$  (ולכן גם  $T$  אינווריאנטים)  $\dim U_j = r_j$  כאשר  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m$

ב. נרשום  $U_j$  בצורה הרגילה  $U_j = \text{sp}(v_j, T(v_j), T^2(v_j), \dots, T^{r_j-1}(v_j))$  אזי

$\Gamma_j = v_j, T(v_j), T^2(v_j), \dots, T^{r_j-1}(v_j)$  הוא בסיס של  $U_j$  נבנה בסיס  $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_m$

לפי חלק א' זהו בסיס של  $V$  אזי  $B = [T]_{\Gamma} = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_m \end{pmatrix}$  כאשר

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצה זו נקראת צורת Jordan של מטריצה נילפוטנטית.

**הוכחה:** נוכיח באינדוקציה לפי  $1 \leq n$ . אם  $n=1$  אזי  $r_1 \leq n$  לכן  $r_1=1$  ז"א  $\dim U_1=1$  כלומר  $U_1=V$ .

ג. נניח שהוכחנו את הטענה עבור כל  $\dim V = m < n$  ונוכיח עבור  $V$  כך ש  $\dim V = n$ . לפי טענה שהוכחנו קיים תת מרחב  $U_1$  ציקלי  $r_1$  מימדי. לפי המשפט האחרון קיים  $W$  ת"מ של  $V$  שהוא  $T$  אינווריאנטי כך ש  $V = U_1 \oplus W$ , נגדיר העתקה  $T': W \rightarrow W$  כך ש  $T' = T|_W$ . אזי לכל  $w \in W$   $T'^n(w) = 0$  לכן  $T'$  נילפוטנטית, אינדקס הנילפוטנטיות שלה הוא מספר  $r_2 \leq r_1$ . אבל  $\dim W < n$ , לכן לפי הנחת

האינדוקציה  $W = \bigoplus_{j=2}^m U_j$  כאשר  $U_j$  הם תת מרחבים T ציקליים  $\dim U_j = r_j$   
 כאשר  $r_2 \geq \dots \geq r_m$  לכן  $V = U_1 + \bigoplus_{j=2}^m U_j$  כלומר  $V = \bigoplus_{j=1}^m U_j$  כנדרש.

**טענה 1:** תהי B מטריצה בגודל  $l \cdot l$  מן הצורה

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = (0, e_1, \dots, e_{l-1})$$

מאפס במטריצה  $B^k$  הוא  $0 \leq k \leq l \Rightarrow l-k$   
 $k > l \Rightarrow 0$

**הוכחה:**  $Be_i = e_{i-1} \mid Be_1 = 0$   $2 \leq i \leq l$ ; לפי צורת המטריצה. נוכיח ש  
 $B^k = (0, 0, \dots, e_1, \dots, e_{l-k})$  באינדוקציה.

בסיס: אם  $k=1$  זה נתון.

צעד: אכן, אם זה נכון עבור  $k$  אז

$$B^{k+1} = B(B^k) = (B0, B0, \dots, Be_1, \dots, Be_{l-k}) = (0, 0, \dots, e_1, \dots, e_{l-k-1})$$

בדיוק  $l-k$  עמודות השונות מאפס. בפרט אם  $k=1$  אזי  $B^k=0$ . (נכון גם מהעובדה שאינדקס הנילפוטנטיות של מטריצה קטן או שווה ממימד המרחב שהוא גודל המטריצה.)

**תוצאה 1:** בתנאים של טענה 1. אם דרגה של מטריצה  $0 < B^k < B^{k+1}$  אזי

$$r(B^{k+1}) = r(B^k) - 1 \text{ ואם } r(B^k) = 0 \text{ אזי } r(B^{k+1}) = r(B^k)$$

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_m \end{pmatrix} \text{ אזי } A^k = \begin{pmatrix} B_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_m^k \end{pmatrix} \text{ לכל } k \geq 1. \text{ כלומר כל}$$

בלוק  $B_i$  כאשר  $1 \leq i \leq m$  מקיים את התוצאה..

הדרגה של המטריצה  $A^k$  שווה לסכום הדרגות של כל מטריצות הבלוקים שמרכיבות אותה, כי אם עמודה מסוימת בבלוק מסוים שווה לאפס אזי גם ב  $A^k$

$$\text{היא שווה לאפס ולכן } r(A^k) = \sum_{j=1}^m r(B_j^k) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ B_j^k \neq 0}} r(B_j^k) \text{ ונקבל כי}$$

$$r(A^{k+1}) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ B_j^k \neq 0}} (r(B_j^k) - 1) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ B_j^k \neq 0}} r(B_j^k) - c(k)$$

$A^k$  השונים מאפס.

$$r(A^k) - r(A^{k+1}) = C_k \text{ מסקנה:}$$

**סימון:** יהי  $j \geq 0, k \geq 1$  נסמן  $n(j, k)$  מספר הבלוקים של  $A^k$  כך שדרגת הבלוק היא  $j$ . אם  $j > 1$  מספר זה בדיוק שווה למספר הבלוקים במטריצה  $A^{k-1}$  כאלה שדרגתם היא  $j+1$ . ז"א  $n(j, k) = n(j+1, k-1)$ . אם  $j=0$  אז  $n(0, k) = n(0, k-1) + n(1, k-1)$  ולכן נקבל  $n(0, k) - n(0, k-1) = n(1, k-1)$  כלומר מספר הבלוקים שהפכו לאפס בשלב המעבר מ  $k-1$  ל  $k$  הם הבלוקים שדרגתם הייתה 1. בנוסף נקבל

$$(1) n(1, k-1) = n(2, k-2) = n(3, k-3) = \dots = n(k-1, 1)$$

**הערה:**  $n(k-1, 1)$  זה מספר הבלוקים במטריצה  $A$  בעלי דרגה  $k-1$  אבל בלוקים של

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה  $A$  בעלי דרגה  $k-1$  הם מן הצורה כאשר

$$. B_j \in M_k(F)$$

נסמן  $d_k$  מספר הבלוקים של  $A$  בעלי הצורה  $k \times k$  אזי  $d_k = n(k-1, 1)$  כמו כן  $n(0, k)$  הוא מספר הבלוקים של  $A^k$  שדרגתם היא אפס, כלומר שהם שווים לאפס לכן  $n(0, k) = \underbrace{m}_{\text{all blocks}} - C_k$  ולפי 1 נקבל  $m - C_k - (m - C_{k-1}) = d_k$  כלומר  $(2) C_{k-1} - C_k = d_k$

ולפי המסקנה נקבל כנוסחה סופית

$$(3) d_k = C_{k-1} - C_k = (r(A^{k-1}) - r(A^k)) - (r(A^k) - r(A^{k+1}))$$

**משפט:** תהי  $A$  מטריצה נילפוטנטית בצורת Jordan נסמן על ידי  $d_k$  מספר הבלוקים של  $A$  בעלי הצורה  $k \times k$  אזי לכל  $k \geq 2 \Rightarrow d_k = r(A^{k-1}) + r(A^{k+1}) - 2r(A^k)$  (נובע מהמסקנה)

**תזכורת:**  $r(T) = \dim \text{Im}(T)$  אם  $A = [T]_{\Gamma}$  כאשר  $\Gamma$  בסיס כלשהו אזי  $r(A) = r(T)$ .

**תוצאה 1:** תהי  $T: V \rightarrow V$  נילפוטנטית,  $V$  בעל מימד סופי ותהי  $A$  צורת Jordan של העתקה  $T$  אזי מספר הבלוקים מן הצורה  $k \times k$   $2 \leq k$  ב  $A$  הוא

$$r(T^{k-1}) + r(T^{k+1}) - 2r(T^k)$$

**תוצאה 2:** בתנאים של התוצאה הקודמת, צורת Jordan של  $T$  מוגדרת באופן חד ערכי.

**צורת Jordan של מטריצה כלשהי A:**

תהי  $A \in M_n(\mathbb{C})$  ויהיו  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  הם העי"ע של A השונים זה מזה. אזי אנו אומרים ש A היא בעלת צורת Jordan אם:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_m \end{pmatrix} \quad \text{א.}$$

כאשר  $A_j$  מן הצורה  $n_j \cdot n_j$  ו  $\sum_{j=1}^m n_j = n$

$$A = \begin{pmatrix} A_{1j} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{r_j j} \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

כאשר  $A_{ij}$  הן מטריצות ריבועיות שיכולות להיות משני הצורות הבאות בלבד:

1. מטריצה  $1 \times 1$  ואז  $A_{ij} = (\lambda_j)$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad \text{2.}$$

זהו בעצם צירוף של שני מטריצות

האחת שבאלכסון שלה מופיע  $\lambda_j$  והשני צורת Jordan של מטריצה נילפוטנטית.

במטריצה כזו יתקיים:  $f_A(t) = \det(tI - A) = (t - \lambda_1)^{n_1} (t - \lambda_2)^{n_2} \dots (t - \lambda_m)^{n_m}$

**משפט:** יהי V מרחב לינארי ממימד n,  $T: V \rightarrow V$  לינארית אזי קיים בסיס  $\Gamma$  של V כך ש  $A = [T]_\Gamma$  היא בעלת צורת Jordan. יתירה מזאת A מקיימת את הדרישות הבאות:

$$f_T(t) = \prod_{j=1}^m (t - \lambda_j)^{n_j}$$

כאשר  $A_j$  היא מן הצורה  $n_j \cdot n_j$

יהי  $r_j$  מספר הבלוקים הקטנים ב  $A_j$  אזי  $r_j$  הוא הריבוי הגיאומטרי של  $\lambda_j$  נסמן על ידי  $A_{ij}$  את הבלוקים הקטנים של  $A_j$  אזי ניתן לכתוב ש  $A_{ij}$  הוא מן הצורה  $r_{ij} \times r_{ij}$  אזי  $l_j = \max_{1 \leq i \leq r_j} r_{ij}$  הוא החזקה של  $t - \lambda_j$  בפולינום המינימלי.

**טענה:** יהי V מרחב לינארי  $T: V \rightarrow V$  ו  $U_i$   $1 \leq i \leq k$  ת"מ של V אינווריאנטים לגבי

$$T|_{U_i} \text{ רגולריות לכל } 1 \leq i \leq k \text{ אזי } T|_U \text{ גם רגולרית.}$$

יהי  $U = \bigotimes_{i=1}^k U_i$  אם  $T|_{U_i}$  רגולריות לכל  $1 \leq i \leq k$

**הוכחה:** נוכיח למקרה  $k=2$  כלומר כלומר  $U = U_1 \oplus U_2$  נניח  $u \in U$  כך ש  $T(u) = 0$  אזי  $u = u_1 + u_2; u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$  אזי  $T(u_1) + T(u_2) = 0$  אזי  $T(u_1) = -T(u_2)$  ולכן  $T(u_1) \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$  אבל  $T|_{U_1}$  רגולרית ולכן  $u_1 = 0$  ולכן  $T(u_2) = 0$  ולכן  $u_2 = 0$  כי גם  $T|_{U_2}$  היא רגולרית.

נניח נכונות הטענה עבור  $k$  ונוכיח עבור  $k+1$ .

אכן,  $W = \bigoplus_{i=1}^k U_i$  כאשר לפי הנחת האינדוקציה  $T|_W$  רגולרית, וברור גם ש  $W$  הוא  $T$  אינווריאנטי ועבור מקרה של שני ת"מ הוכחנו ולכן  $T$  רגולרית על  $W \oplus U_{k+1}$  כנדרש.

**משפט 1:** יהי  $V$  מרחב לינארי מעל  $F$  ותהי  $T: V \rightarrow V$  לינארית כך ש

הם העי"ע של  $T$  השונים זה מזה אזי קיימים  $f_T(t) = \prod_{j=1}^m (t - \lambda_j)^{n_j}$  כאשר  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

תתי מרחבים  $1 \leq j \leq m; U_j$  אינווריאנטים לגבי  $T$  כך ש  $V = \bigoplus_{j=1}^m U_j$  וגם  $T|_{U_j} = \lambda_j I + N_j$  כאשר  $N_j$  היא נילפוטנטית.

**טענת עזר 1:** יהי  $\lambda$  עי"ע של  $T$  אזי קיים  $1 \leq m_\lambda$  כך ש לכל  $m_\lambda \leq j$

$$\ker((T - \lambda I)^j) = \ker((T - \lambda I)^{m_\lambda})$$

**הוכחה:** לכל  $1 \leq j$  נקבל  $\ker((T - \lambda I)^{j+1}) \supseteq \ker((T - \lambda I)^j)$  אכן אם

$$v \in \ker((T - \lambda I)^j)$$

$$(T - \lambda I)^{j+1}(v) = (T - \lambda I)(T - \lambda I)^j(v) = (T - \lambda I)(0) = 0 \Rightarrow v \in \ker(T - \lambda I)^{j+1}$$

נסמן  $d_j = \dim \ker(T - \lambda I)^j$  ונקבל לכל  $1 \leq j$  כי  $d_j \leq d_{j+1}$  אבל  $d_j \leq n$  לכן קיים  $m$  כך ש  $d_j = d_m$  עבור כל  $m \leq j$ . כנדרש.

$$U_\lambda = \ker((T - \lambda I)^{m_\lambda})$$

**טענת עזר 2:**  $U_\lambda$  הוא  $T$  אינווריאנטי.

**הוכחה:** אם  $v \in U_\lambda$  אזי גם  $(T - \lambda I)(v) \in U_\lambda$  אכן:

$$(T - \lambda I)^{m_\lambda} (T - \lambda I)(v) = (T - \lambda I)(T - \lambda I)^{m_\lambda} (v) = (T - \lambda I)(0) = 0$$

$$T(v) = (T - \lambda I)(v) + \lambda v \in U_\lambda$$

**טענת עזר 3:** יהיו  $\lambda \neq \mu$  שני עייע של  $T$  אזי  $T - \lambda I_{U_\mu}$  רגולרית וגם  $U_\mu$  אינווריאנטית לגבי  $T - \lambda I$ .

**הוכחה:** ברור שאם  $v \in U_\mu$  אזי  $(T - \lambda I)(v) = T(v) - \lambda v \in U_\mu$  כי  $T U_\mu$  אינווריאנטית לפי טענת עזר 2.

נניח בשלילה ש  $T - \lambda I_{U_\mu}$  איננה רגולרית אזי קיים  $0 \neq v \in U_\mu$  כך ש  $(T - \lambda I)(v) = 0$  אזי  $T(v) = \lambda v$  ולכן  $(T - \mu I)(v) = T(v) - \mu v = (\lambda - \mu)v$  ובאינדוקציה לפי  $m$  נקבל ש:  $(T - \mu I)^m(v) = (\lambda - \mu)^m v$ . לכל  $1 \leq m$   $U_\mu = \ker((T - \mu I)^m)$  לכן אם  $v \in U_\mu$  אז  $(T - \mu I)^m(v) = (\lambda - \mu)^m v = 0$  אבל  $\lambda - \mu \neq 0; v \neq 0$  ולכן קיבלנו סתירה ז"א  $T - \lambda I_{U_\mu}$  רגולרית.

**מסקנה:**  $((T - \lambda I)_{|U_\mu})^m$  רגולרית לכל  $1 \leq m$

**הוכחת משפט 1:**

יהיו  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$  עייע של  $T$  השונים זה מזה ונסמן  $U_j = U_{\lambda_j}$ . נסמן

$$1 \leq k \leq m; W_k = \sum_{j=1}^k U_j$$

שלב 1: נוכיח ש  $W_k = \bigoplus_{j=1}^k U_j$  באינדוקציה לפי  $k$ .

בסיס: עבור  $k=1$  נקבל בצורה טריוויאלית  $W_1 = \bigoplus_{j=1}^1 U_j = U_1$

נניח שטענה (1) נכונה עבור  $k$  אזי  $W_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} U_j = W_k + U_{k+1}$  כאשר  $W_k = \bigoplus_{j=1}^k U_j$  לפי

הנחת האינדוקציה. נניח כי  $v \in W_k \cap U_{k+1}$  אזי  $v \in U_{k+1}$  כלומר

$$0 = (T - \lambda_{k+1} I)^m(v) = (T - \lambda_{k+1} I)^m(v) \text{ אבל } (T - \lambda_{k+1} I) \text{ רגולרית על } U_j \text{ כאשר } 1 \leq j \leq k$$

לפי טענה 3. לפי הטענה שהוכחנו לפני המשפט  $(T - \lambda_{k+1} I)_{|W_k}$  רגולרית כי  $W_k = \bigoplus_{j=1}^k U_j$

לכן  $(T - \lambda_{k+1} I)^m$  רגולרית על  $W_k$  לכל  $1 \leq m$  לכן לפי (2)  $v=0$ .

מסקנה:  $W_k \cap U_{k+1} = 0$  לכן  $W_{k+1} = W_k \oplus U_{k+1}$

נוכיח ש  $W_m = V$ .

$$\text{נשים לב כי } f_T(t) = \prod_{j=1}^m (t - \lambda_j)^{n_j} \text{ נסמן } T_0 = I; T_k = \prod_{j=1}^k (T - \lambda_j I)^{n_j}$$

$1 \leq k \leq m; T_k = (T - \lambda_k I)^{n_k} T_{k-1}$  נניח בדרך השלילה כי קיים  $v \in V$  כך ש  $v \notin W_m$ . נתבונן בסדרה של וקטורים:  $v = T_0(v), T_1(v), T_2(v), \dots, T_m(v)$  לפי ההנחה  $T_0(v) \notin V$

אבל  $T_m(v) = 0$  כי  $T_m = f_T(T) = 0$  ולכן  $T_m(v) \in W_m$ . קיים  $k$  מינימלי  $1 \leq k \leq m$  כך ש  $T_k(v) \in W_m$  אבל  $T_{k-1}(v) \notin W_m$ .

אם  $T_k(v) \in W_m$  אז  $T_k(v) = \sum_{i=1}^k u_i$   $1 \leq i \leq k; u_i \in U_i$

$$(2) G_k = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m U_j \quad \text{כלומר} \quad W_m = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m U_j \oplus U_k = G_k \oplus U_k \quad \text{סימון:}$$

$$g_k \in G_k, u_k \in U_k \quad \text{כאשר} \quad (3) T_k(v) = g_k + u_k \quad \text{לכן}$$

לפי טענת עזר 3  $(T - \lambda_k I)|_{U_{\lambda_j}}$  היא רגולרית כל עוד  $j \neq k$ . לכן  $(T - \lambda_k I)|_{G_k}$  וגם

$(T - \lambda_k I)^{n_k}|_{G_k}$  רגולריות לפי סימון (2) והטענה שהוכחנו לפני ניסוח המשפט. כלומר

$$\text{Im}((T - \lambda_k I)^{n_k}|_{G_k}) = G_k \quad \text{רגולרית ז"א} \quad (T - \lambda_k I)^{n_k} : G_k \rightarrow G_k \quad \text{זאת אומרת קיים}$$

$$q_k \in G_k \quad \text{כך ש} \quad (4) (T - \lambda_k I)^{n_k}(q_k) = g_k \quad \text{לפי (3) ו(1) נקבל}$$

$$(4) \quad (T - \lambda_k I)^{n_k} T_{k-1}(v) = u_k + (T - \lambda_k I)^{n_k}(q_k) \quad \text{נעביר אגף ונקבל}$$

$$(T - \lambda_k I)^{n_k} (T_{k-1}(v) - q_k) = u_k \quad \text{נפעיל את } (T - \lambda_k I)^{m_{\lambda k}} \text{ על שני האגפים ונקבל:}$$

$$(T - \lambda_k I)^{n_k + m_{\lambda k}} (T_{k-1}(v) - q_k) = (T - \lambda_k I)^{m_{\lambda k}} (u_k) = 0 \quad \text{לכן}$$

$$\ker(T - \lambda_k I)^{n_k + m_{\lambda k}} = U_k \quad \text{אבל לפי טענת עזר 1} \quad (T_{k-1}(v) - q_k) \in \ker(T - \lambda_k I)^{n_k + m_{\lambda k}}$$

$$(T_{k-1}(v) - q_k) \in U_k \subseteq W_m \quad \text{אבל} \quad q_k \in G_k \subseteq W_m \quad \text{כאשר} \quad G_k \subseteq W_m \quad \text{ולכן}$$

$$T_{k-1}(v) = q_k + (T_{k-1}(v) - q_k) \in W_m \quad \text{כלומר ההנחה שקיים } v \text{ שאיננו שייך ל}$$

$$W_m \text{ מביאה לסתירה ולכן } V = W_m \text{ כנדרש. כלומר } V = \bigoplus_{j=1}^m U_j \text{ כאשר כל } U_j \text{ הוא } T$$

איננו ריאנטי, יתירה מזאת  $U_j = \ker((T - \lambda_j I)^{m_{\lambda j}})$  ז"א  $T - \lambda_j I|_{U_j}$  נילפוטנטית.

$$T - \lambda_j I|_{U_j} = N_j \quad \text{ז"א} \quad T_{U_j} = \lambda_j I + N_j$$

**טענה:** תהי  $N : W \rightarrow W$  נילפוטנטית כאשר  $W$  מרחב לינארי מעל  $F$ , יהי  $\lambda \in F$  אזי ניתן למצוא ת"מ לינאריים  $W_j$   $1 \leq j \leq k$   $N$  ציקליים ובסיסים  $\Gamma_j$   $1 \leq j \leq k$  בתת

$$[N + \lambda I]_{\Gamma} = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_k \end{pmatrix} \quad \text{מרחבים הני"ל ונבנה בסיס} \quad \Gamma = \Gamma_1 \dots \Gamma_k \quad \text{אזי:}$$

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & \end{pmatrix} \quad \text{כאשר} \quad B_j = [N + \lambda I]_{\Gamma_j}$$

**הוכחה:** לפי המשפט על צורת Jordan של מטריצה נילפוטנטית קיימים ת"מ  $W_j$   $N$

$$[N]_{\Gamma} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_k \end{pmatrix} \quad \text{ציקליים ובסיסים} \quad \Gamma_j \quad 1 \leq j \leq k \quad \text{כך ש}$$

$$[N + \lambda I]_{\Gamma_j} = [N|_{W_j}]_{\Gamma_j} + [\lambda I|_{W_j}]_{\Gamma_j} \quad \text{ולכן} \quad A_j = [N]_{\Gamma_j} \quad \text{ו}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**תוצאה:** תהי  $T: V \rightarrow V$  לינארית שרירותית ויהיו  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  כל העייע של  $T$  השונים

זה מזהו  $f_T(t) = \prod_{j=1}^m (t - \lambda_j)^{n_j}$  אזי קיימים תתי מרחבים  $T$  אינווריאנטים של  $U_j \subset V$

כך ש  $T|_{U_j} = N_j + \lambda_j I$  ו  $V = \bigoplus_{j=1}^m U_j$ . יתירה מזאת כל ת"מ  $U_j$  מתפרק בעצמו לתת

מרחבים  $T$  אינווריאנטים, כלומר  $U_j = \bigoplus_{i=1}^{r_j} U_{ij}$  וניתן לבחור בסיסים  $\Gamma_{ij}$  בכל תת

מרחב  $U_{ij}$  כך ש  $[T]_{\Gamma} = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_m \end{pmatrix}$  כך ש  $\Gamma = \Gamma_1 \dots \Gamma_k$  כאשר כל  $B_j$   $1 \leq j \leq m$  הוא

$$B_j = [T|_{U_j}]_{\Gamma_j} = \begin{pmatrix} B_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{2j} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{r_j j} \end{pmatrix}$$

כאשר  $\Gamma_j = \Gamma_{1j} \dots \Gamma_{r_j j}$  וכל מטריצה

$$B_{ij} = [T|_{U_{ij}}]_{\Gamma_{ij}} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_j & \end{pmatrix}$$

**תוצאה:** תהי  $J$  צורת Jordan של העתקה  $T$  אזי  $f_T(t) = \prod_{j=1}^m (t - \lambda_j)^{n_j}$  כאשר  $n_j$  הוא

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_m \end{pmatrix}$$

מספר השורות (או העמודות) בחלק  $B_j$  המופיע בפיתוח

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_m \end{pmatrix}$$

הערה: אם  $g$  פולינום מעל שדה  $F$  ו  $J$  אז

$$g(J) = \begin{pmatrix} g(B_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & g(B_m) \end{pmatrix}$$

וזו  $g(J) = 0$  אם  $g(B_j) = 0$  לכל  $1 \leq j \leq m$

מתקיים רק אם  $g$  מתחלק בכל הפולינומים המינימליים של  $B_j$  אבל  $B_j = N_j + \lambda_j I$

כאשר  $N_j$  נילפוטנטית ולכן  $m_{B_j}(t) = (t - \lambda_j)^{l_j}$  הפולינום המינימלי של  $B_j$ .

$$B_j = \begin{pmatrix} B_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{2j} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{r_j j} \end{pmatrix}$$

ולכן  $l_j = \max_{1 \leq i \leq r_j} r_{ij}$  ו  $m_{B_j}(t) = (t - \lambda_j)^{r_{ij} \rightarrow \dim B_{ij}}$