דינה בליאר
3/11/05

אלגברה ליניארית 1 תשס"ו – תרגיל מס' 1

1. יהא F שדה כלשהו, הוכיחו את התכונות הבאות:
   - ✓ א. תכונת הצמצום בחיבור: לכל $a,b,c\in F$ מתקיים: $a+c=b+c \quad \Leftarrow \quad a=b$.
   - ✓ ב. תכונת הצמצום בכפל: לכל $a,b,c\in F$ כאשר $c\neq 0$ מתקיים:
     $ac=bc \quad \Leftarrow \quad a=b$.
   - ג. לכל a מתקיים $0\cdot a=a\cdot 0=0$. (רמז: $0+0=0$)
   - ד. לכל $a\neq 0$ מתקיים: $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$
   - ה. לכל a מתקיים $-(-a)=a$.
   - ו. לכל a מתקיים $(-1)\cdot a=-a$.
   - ז. לכל a,b מתקיים $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$.
   - ח. לכל a,b מתקיים $(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$.
   - ט. לכל a,b מתקיים $(a\cdot b)^{-1}=(a^{-1})\cdot(b^{-1})$.
2. יהא F שדה כלשהו, נגדיר פעולת חיסור על ידי: $a-b=a+(-b)$. הראו כי לכל $a,b,c\in F$ מתקיים: $a(b-c)=ab-ac$.
3. עבור שדה F, איבר $a\in F$ ומספר טבעי n נגדיר את $n\times a$ להיות חיבור של a עם עצמו n פעמים (זהו אינו כפל ב-n כיוון ש-n כלל אינו איבר של F). הוכיחו את התכונות הבאות:
   - א. לכל $a,b\in F$ מתקיים: $n\times(a+b)=(n\times a)+(n\times b)$
   - ב. לכל $a,b\in F$ מתקיים: $n\times(a\cdot b)=(n\times a)\cdot b=a\cdot(n\times b)$
4. יהיו a,b איברים בשדה F. הוכיחו כי אם $a\cdot b=0$ אזי $a=0$ או $b=0$.
5. לכל אחת מהקבוצות הבאות רשמו האם היא שדה. אם כן הוכיחו זאת, ואם לאו תנו אכסיומה או הגדרה שאינה מתקיימת.
   - א. $\Re^2=\{(a,b)\mid a,b\in\Re\}$ עם פעולת חיבור: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
     ופעולת כפל: $(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c,b\cdot d)$.
   - ב. השלמים Z עם פעולות חיבור וכפל רגילות.
   - ג. $Z\cup\{1/a\}_{a\in Z}$ (השלמים איחוד כל ההופכיים שלהם) עם פעולות חיבור וכפל רגילות.
6. הוכיחו כי קיים שדה אחד ויחיד בעל שני איברים. הדרכה: בהינתן איבר ה-0 ואיבר היחידה 1 הראו שיש דרך יחידה לרדום את לוח הכפל והחיבור כך שמתקיימות כל האכסיומות של השדה.

אלגברה ליניארית 1 תשס"ו – פתרון תרגיל מס' 1

1. -

א. נניח כי $a+c=b+c$, לפי אקסיומה ח1 בעמיצור (קשירות) מתקיים: $(a+c)+(-c)=(b+c)+(-c)$. מאסוציאטיביות החיבור נובע $(a+c)+(-c)=a+(c+(-c))$. מקיום איבר נגדי מקבלים: $a+(c+(-c))=a+0$. מהיות 0 ניטראלי לחיבור: $a+0=a$. באופן דומה מראים ש- $(b+c)+(-c)=b$. ולכן: $a=(a+c)+(-c)=(b+c)+(-c)=b$.

ב. הוכחת סעיף זה דומה לקודם.

ג. ראשית $0+0=0$ (כיוון ש-0 ניטראלי לחיבור). לכן: $0\cdot a=(0+0)\cdot a$, מחוק הפילוג מקבלים: $(0+0)\cdot a=0\cdot a+0\cdot a$. אם כן הראינו כי $0\cdot a=0\cdot a+0\cdot a$.
לפי אקסיומה ח1 בעמיצור (קשירות) : $0\cdot a+(-(0\cdot a))=(0\cdot a+0\cdot a)+(-0\cdot a)$.
אגף שמאל שווה ל-0, ואילו אגף ימין שווה ל-
$0\cdot a+(0\cdot a+(-(0\cdot a))=0\cdot a+0=0\cdot a$. בכך הראינו כי $0\cdot a=0$, השוויון $a\cdot 0=0$ נובע מקומוטטיביות הכפל.

ד. מיחידות האיבר ההופכי נובע שדי להוכיח את השוויון $(a^{-1})a=1$. מקומוטטיביות הכפל: $(a^{-1})a=a(a^{-1})$, ומהגדרת ההופכי מקבלים: $a(a^{-1})=1$ כנדרש.

ה. הוכחת סעיף זה דומה לקודם.

ו. מיחידות האיבר ההופכי נובע שדי להוכיח את השוויון: $a+((-1)\cdot a)=0$. מהגדרת היחידה: $a+((-1)\cdot a)=1\cdot a+(-1)\cdot a$, מחוק הפילוג:
$1\cdot a+(-1)\cdot a=(1+(-1))\cdot a$, מהגדרת האיבר הנגדי: $(1+(-1))a=0\cdot a$ ומסעיף ג' בשאלה זו: $0\cdot a=0$.

ז. ראשית נוכיח כי $(-1)\cdot(-1)=1$, לפי הסעיף הקודם $(-1)\cdot(-1)=-(-1)$ (כלומר זהו האיבר הנגדי של (-1)), כיוון ש- $(-1)+1=0$ אנו רואים שהנגדי של (-1) הוא 1, ולכן $(-1)\cdot(-1)=1$. לפי הסעיף הקודם:
$(-a)(-b)=((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot b)$, מאסוציאטיביות הכפל:
$((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot b)=((-1)\cdot(-1))\cdot ab=1\cdot ab=ab$.

ח. נעזר בסעיף ו' ובאסוציאטיביות הכפל: $(-a)\cdot b=((-1)\cdot a)\cdot b=(-1)\cdot(a\cdot b)=-(a\cdot b)$, באופן דומה ותוך שימוש בקומוטטיביות הכפל
מקבלים: $(-a)\cdot b=((-1)\cdot a)\cdot b=(a\cdot(-1))\cdot b=a\cdot((-1)\cdot b)=a\cdot(-b)$

ט. מיחידות ההופכי די להראות כי $(ab)\cdot(a^{-1}\cdot b^{-1})=1$, נוכיח זאת ע"י שימוש בהגדרת ההופכי ובקומוטטיביות ואסוציאטיביות
הכפל:
$$\begin{aligned}&(ab)\cdot(a^{-1}b^{-1})=a(b(a^{-1}b^{-1}))=a((ba^{-1})b^{-1})\\&=a((a^{-1}b)b^{-1})=a(a^{-1}(bb^{-1}))=(aa^{-1})(bb^{-1})=1\cdot 1=1\end{aligned}$$

2. מהגדרת החיסור: $a(b-c)=a(b+(-c))$, מחוק הפילוג: $a(b+(-c))=ab+a(-c)$, משאלה 1 סעיף ח': $ab+a(-c)=ab+(-(ac))$, ושוב מהגדרת החיסור: $ab+(-(ac))=ab-ac$.

3. שימו לב כי ניתן להגדיר את $n\times a$ באינדוקציה: $\begin{array}{l}0\times a=0,\\(n+1)\times a=n\times a+a\end{array}$, נשתמש בהגדרה זו כדי להוכיח את הסעיפים הבאים.

א. בסיס האינדוקציה $n=0$: מצד אחד $0\times(a+b)=0$, מצד שני: $0\times a+0\times b=0+0=0$ כנדרש. נניח שהוכחנו את הטענה עבור n כלשהו ונוכיח

עבור $n+1$. מהגדרת הפעולה × נובע: $(n+1)\times(a+b)=n\times(a+b)+(a+b)$,
מהנחת האינדוקציה:
$n\times(a+b)+(a+b)=n\times a+n\times b+a+b=(n\times a+a)+(n\times b+b)$. שוב
מהגדרת הפעולה × נובע: $(n\times a+a)+(n\times b+b)=(n+1)\times a+(n+1)\times b$

ב. ההוכחה דומה לסעיף הקודם.

4. נניח כי $ab=0$, ונניח בשלילה כי $a\neq 0$ וגם $b\neq 0$. לכן קיימים a^{-1} וגם b^{-1}, כפי שהוכחנו בשאלה 1 סעיף ט': $(ab)\cdot(a^{-1}b^{-1})=1$. מצד שני, לפי שאלה 1 סעיף ג':
$(ab)\cdot(a^{-1}b^{-1})=0\cdot(a^{-1}b^{-1})=0$. קיבלנו כי: $0=1$ בסתירה.

5. -

א. $\Re^2=\{(a,b)\,|\,a,b\in\Re\}$ אינה שדה, למשל האיבר הניטראלי לחיבור הוא $(0,0)$ אבל מכפלת שני איברים שונים מ-0 יכולה לתת 0: $(0,1)\cdot(1,0)=(0,0)$ בסתירה למה שהוכחנו בשאלה 4. דרך אחרת היא להראות ש- $(1,1)$ הוא האיבר הניטראלי לכפל אבל למספר $(0,1)$ לא קיים הופכי.

ב. השלמים אינם שדה כיוון שלא קיים הופכי ל-2 למשל.

ג. הקבוצה $Z\cup\{1/a\}_{a\in Z}$ עם פעולות חיבור וכפל רגילות אינה שדה כיוון שאקסיומת הקשירות לא מתקיימת, למשל: $1+\frac{1}{2}$ אינו איבר בקבוצה זו.

6. ראשית נבנה את לוח החיבור. מהגדרת ה-0 : $1+0=1,\quad 0+1=1,\quad 0+0=1$. לכן האיבר הנגדי ל-1 חייב להיות 1, כלומר $1+1=0$. כעת נבנה את לוח הכפל, כפי שראינו בשאלה 1 סעיף ג': $1\cdot 0=0,\quad 0\cdot 1=0,\quad 0\cdot 0=0$. מהגדרת 1 כניטראלי לכפל: $1\cdot 1=1$. לכן זהו השדה היחיד האפשרי בן שני איברים.

<u>אלגברה ליניארית 1 – תרגיל 2</u>

הנושא : מספרים מרוכבים.

תזכורת: הארגומנט של מספר מרוכב z מוגדר להיות הזווית θ שבין הקטע המחבר את z לראשית ובין הכוון החיובי של ציר ה- x . כלומר $\theta = arctg(\frac{y}{x})$ והרביע בו נמצאת θ ייקבע ע"פ סמני x ו y .

1. הבא את הביטויים הבאים לצורה $a+bi$:
   א. $\frac{1+i}{1-i}$
   ב. $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$

2. העזר בצורה פולארית על מנת לחשב את הביטויים הבאים :
   א. $(-2+2i)(1-i)$
   ב. $(1-i)^6$

3. מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות :
   א. $z^6=8$.
   ב. $z^2+i=0$

4. חשב :
   א. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{180}$
   ב. $\operatorname{Im}\left(\frac{3+i}{-1+2i}\right)$

5. הוכח :
   א. $\operatorname{Re} Z \le |\operatorname{Re} Z| \le |Z|$.
   ב. $\operatorname{Im} Z \le |\operatorname{Im} Z| \le |Z|$.
   ג. $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$

6. הוכח כי אם w שרש n-י של היחידה, ל- $n>1$ מ"ס טבעי, (כלומר $w=cis(2\pi/n)$) אזי $1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=0$ (רמז – הכפל ב- $1-w$).

אלגברה ליניארית 1 – פתרון 2

הנושא : מספרים מרוכבים.

1. הבא את הביטויים הבאים לצורה $a+bi$:

א. $\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{4+4i-1}{4+1}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

ב. $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{(1-i)(-i)}{i(-i)}=\frac{-1+i}{2}+\frac{-1-i}{1}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

2. העזר בצורה פולארית על מנת לחשב את הביטויים הבאים :

א. $(-2+2i)(1-i)$

פתרון :

$$(-2+2i)(1-i)=2(-1+i)(1-i)=-2(1-i)^2=-2(\sqrt{2}cis(-\pi/4))^2=-4cis(-\pi/2)=4i$$

ב. $(1-i)^6$

פתרון : $(1-i)^6=(\sqrt{2}cis(-\pi/4))^6=8cis(-3\pi/2)=8cis(\pi/2)=8i$

3. מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות :

א. $z^6=8$.

פתרון : נציג את המשוואה בהצגה קוטבית : $z^6=r(\cos\theta+i\sin\theta)=8$.

נשווה ערכים מוחלטים ונקבל $8=r^6$, $8=8+0i=8(\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k)$ עבור

$k=0,1,2...$. לכן $z=\sqrt[6]{8}(\cos\frac{2\pi k}{6}+i\sin\frac{2\pi k}{6})$ עבור $k=0,1,2...$.

לפיכך התקבלו הפתרונות הבאים : $z=\sqrt[6]{8}(\cos\frac{\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi k}{3})$ כאשר

$k=0,1,2,3,4,5$ (בגלל המחזוריות של הפונקציות הטריגונומטריות אזי עבור $k=6$

נקבל $\cos 0=\cos 2\pi,\sin 0=\sin 2\pi$ כלומר חזרה על הפתרון שקיבלנו עבור $k=0$,

ובהתאמה עבור $k>6$)

ב. $z^2+i=0$

פתרון : $z^2=-i$, $|-i|=1$, לכן

$$z^2=-i=r(\cos\theta+i\sin\theta)=1(\cos\theta+i\sin\theta)=1(\cos(\frac{3\pi}{2}+2\pi k)+i\sin(\frac{3\pi}{2}+2\pi k))$$

עבור $k=0,1,2...$ נוציא שורש ונקבל $z=1(\cos(\frac{3\pi}{4}+\pi k)+i\sin(\frac{3\pi}{4}+\pi k))$.

לפיכך התקבלו הפתרונות הבאים : $z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$,

$$z_2=\cos(\frac{3\pi}{4}+\pi)+i\sin(\frac{3\pi}{4}+\pi)$$

4. חשב :

א. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{180}=\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^{180}=e^{45\pi i}=e^{\pi i}=-1$

ב. $\mathrm{Im}\left(\frac{3+i}{-1+2i}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{3+i}{-1+2i}\cdot\frac{-1-2i}{-1-2i}\right)=\frac{-6-1}{1^2+2^2}=-\frac{7}{5}$

5. הוכח:

א. $\mathrm{Re}\,Z\le\left|\mathrm{Re}\,Z\right|\le\left|Z\right|$.

פתרון: נסמן $z=x+yi$ כאשר $x,y\in R$ לכן $\mathrm{Re}\,z=x\le\left|x\right|\le\sqrt{x^2+y^2}=\left|z\right|$

ב. $\mathrm{Im}\,Z\le\left|\mathrm{Im}\,Z\right|\le\left|Z\right|$.

פתרון: נסמן $z=x+yi$ כאשר $x,y\in R$ לכן $\mathrm{Im}\,z=y\le\left|y\right|\le\sqrt{x^2+y^2}=\left|z\right|$

ג. $\left|Z_1\cdot Z_2\right|=\left|Z_1\right|\cdot\left|Z_2\right|$.

פתרון: נציג בהצגה קוטבית: $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),z_2=r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)$.

כעת

$$z_1\cdot z_2=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1\cdot r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

לפיכך $\left|z_1\cdot z_2\right|=r_1\cdot r_2=\left|z_1\right|\left|z_2\right|$

6. הוכח כי אם w שרש n-י של היחידה אזי $1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=0$ (רמז – הכפל ב-$1-w$).

פתרון: מהנתון $1-w\neq 0$ וגם $w^n=1$. לכן $(1+w+w^2+\cdots+w^{n-1})(1-w)=1-w^n=0$.
נקבל ע"י צמצום ב-$1-w$ את הדרוש.

אלגברה ליניארית 1 – תרגיל מספר 3

1. מצאו שדה בן 4 איברים (אין צורך להוכיח את האקסיומות).

2. תהי X קבוצה לא ריקה ונגדיר פעולות חיבור וכפל על $P(X)$ ע"י:
$A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, ו- $A\otimes B=A\cap B$. הוכיחו כי תחת הפעולות הנתונות $P(X)$ הוא שדה.

3. האם קיים שדה F כך ש- $\mathbb{R}\subset F\subset\mathbb{C}$?

4. יהי F שדה, ונגדיר $F_1=\{n\times 1: n\in Z\}$.

   א. נניח כי $|F|<\infty$. האם $F_1=F$?
   ב. מצאו דוגמא בה $|F_1|<\infty$ אבל $|F|=\infty$.
   ג. הוכיחו כי אם $|F_1|=\infty$ אזי $\mathbb{Q}\subseteq F$.

5. בכל אחד מהמקרים הבאים קבעו האם מדובר בתת שדה של הממשיים (רמז: להוכחה אין צורך לבדוק את כל האקסיומות)

   א. $Q[\sqrt{2}]=\{a+b\cdot\sqrt{2}: a,b\in\mathbb{Q}\}$
   ב. $Q[\sqrt{2},\sqrt{3}]=\{a+b\cdot\sqrt{2}+c\cdot\sqrt{3}: a,b,c\in\mathbb{Q}\}$
   ג. $Q[\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}]=\{a+b\cdot\sqrt{2}+c\cdot\sqrt{3}+d\cdot\sqrt{6}: a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}$

6. פתרו את המשוואות הבאות ב- Z_7 :

   א. $\begin{aligned}2x-5y&=6\\ x+3y&=3\end{aligned}$

   ב. $x^2-2=0$

   ג. $\begin{aligned}x-5y&=6\\ x+2y&=3\end{aligned}$

.

אלגברה ליניארית 1 – פיתרון תרגיל מספר 3

1. מצאו שדה בן 4 איברים (אין צורך להוכיח את האקסיומות).

פתרון:

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

2. תהי X קבוצה לא ריקה ונגדיר פעולות חיבור וכפל על $P(X)$ ע"י: , ו- $A\otimes B = A\cap B$.
הוכיחו כי תחת הפעולות הנתונות $P(X)$ הוא שדה. השאלה איננה נכונה כי אין הופכי לכפל.
.

3. האם קיים שדה F כך ש- $\mathbb{R}\subset F\subset \mathbb{C}$?
פיתרון: נניח כי $\mathbb{R}\subset F$ ונראה כי $F=\mathbb{C}$: יהי $z\in F\setminus R$, אזי $z=a+bi$ ו- $b\neq 0$.
מסגירות השדה גם $i=\dfrac{z-a}{b}\in F$ ושוב מסגירות השדה גם $x+yi\in F$ לכל $x,y\in R$, כלומר $F\subseteq \mathbb{C}$, ולכן $F=\mathbb{C}$.

4. יהי F שדה, ונגדיר $F_1=\{n\times 1 : n\in Z\}$.

א. נניח כי $|F|<\infty$. האם $F_1=F$?
פיתרון: לא, למשל השדה בן 4 איברים (ראו שאלה 1)
ב. מצאו דוגמא בה $|F_1|<\infty$ אבל $|F|=\infty$.

פיתרון: נתבונן בקבוצה $F=\left\{\dfrac{P(x)}{Q(x)} : P,Q\in Z_2[x], \mathrm{Q}\neq 0\right\}$ כאשר
$Z_2[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n : a_0,a_1,\ldots,a_n\in Z_2, n\in N\}$. (אוסף
הפולינומים עם מקדמים בשדה $Z_2[x]$). נאמר כי $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{R(x)}{S(x)}$ אם ורק אם
$P(x)\cdot S(x)=R(x)\cdot Q(x)$. נגדיר פעולות של חיבור וכפל על F בדומה לפעולות
המוגדרות על הרציונלים.

נשים לב כי F ביחד עם הפעולות שהגדרנו מהווה שדה: קל לראות כי אוסף
הפולינומים $Z_2[x]$ מקיים סגירות לחיבור וכפל, קומוטטיביות, אסוציאטיביות,
ודיסטריביוטיביות. לכן ההוכחה כי F שדה זהה להוכחה כי $\mathbb{Q}$ שדה. בפרט גם
החיבור והכפל מוגדרים היטב, כלומר לא תלויים בבחירת ההצגה של $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

עבור שדה זה, $F_1=\left\{n\times\dfrac{1}{1} : n\in \mathrm{Z}\right\}=\left\{\dfrac{1}{1},\dfrac{0}{1}\right\}$ ולכן $|F_1|<\infty$ ומצד שני
$|F|=\infty$ כי למשל הפולינומים $1,x,x^2,\ldots,x^n,\ldots$ נמצאים כולם ב- F.

ג. הוכיחו כי אם $|F_1| = \infty$ אזי $\mathbb{Q} \subseteq F$.

הוכחה (ללא כל הפרטים): נגדיר

$S = \left\{ (n \times 1_F) \cdot (m \times 1_F)^{-1} : n\ ,\ m \in Z,\ m \neq 0 \right\}$. נוכיח כי S תת שדה של

F ואיזומורפי ל- $\mathbb{Q}$. ראשית, מהיות $|F_1| = \infty$, עבור $0 \neq m \in Z$,

$m \times 1_F \neq 0$ ולכן הוא הפיך, כלומר S מוגדרת היטב. קל לבדוק שמתקיים

$((a+b) \times 1) = (a \times 1) + (b \times 1)$ וכי $(ab \times 1) = (a \times 1) \cdot (b \times 1)$ לכל .

$a\ , b \in Z$ ומכאן נובע בפשטות כי S סגור לחיבור ולכפל. ברור כי

$0,1 \in S$ וכי קיים הופכי ונגדי ולכן S שדה.

נגדיר העתקה ϕ מ $\mathbb{Q}$ ל- S ע"י $\phi\left(\frac{n}{m}\right) = (n \times 1) \cdot (m \times 1)^{-1}$. נראה כי ϕ

איזומורפיזם: ראשית נבדוק שהיא מוגדרת היטב:

אם $\frac{n}{m} = \frac{a}{b}$ אזי $nb = ma$ ולכן

$(n \times 1) \cdot (b \times 1) = (nb) \times 1 = (ma) \times 1 = (m \times 1) \cdot (a \times 1)$ ולכן

$\phi\left(\frac{n}{m}\right) = (n \times 1) \cdot (m \times 1)^{-1} = (a \times 1) \cdot (b \times 1)^{-1} = \phi\left(\frac{a}{b}\right)$.

עתה נבדוק כי φ שומרת על פעולות החיבור והכפל:

$$\phi\left(\frac{n}{m} + \frac{a}{b}\right) = ((nb+ma) \times 1) \cdot (mb \times 1)^{-1} = (nb \times 1) \cdot (mb \times 1)^{-1} + (ma \times 1) \cdot (mb \times 1)^{-1} =$$

$$= (n \times 1) \cdot (m \times 1)^{-1} + (a \times 1) \cdot (b \times 1)^{-1} = \varphi\left(\frac{n}{m}\right) + \varphi\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\phi\left(\frac{n}{m} \cdot \frac{a}{b}\right) = (na \times 1) \cdot (mb \times 1)^{-1} = (n \times 1) \cdot (a \times 1) \cdot (m \times 1)^{-1} \cdot (b \times 1)^{-1}$$

$$= \left[(n \times 1) \cdot (m \times 1)^{-1}\right] \cdot \left[(a \times 1) \cdot (b \times 1)^{-1}\right] = \varphi\left(\frac{n}{m}\right) \cdot \varphi\left(\frac{a}{b}\right)$$

קל לראות כי φ חח"ע ועל שכן קיימת העתקה הפוכה

: $\psi\left((n \times 1) \cdot (m \times 1)^{-1}\right) = \frac{n}{m}$ (מוגדרת היטב). לכן φ איזומורפיזם. מש"ל

5. בכל אחד מהמקרים הבאים קבעו האם מדובר בתת שדה של הממשיים (רמז: להוכחה אין צורך לבדוק את כל האקסיומות)

א. $Q[\sqrt{2}] = \left\{ a + b \cdot \sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q} \right\}$

פיתרון: נראה כי $Q[\sqrt{2}]$ תת-שדה של הממשיים:

סגירות: $(a + b \cdot \sqrt{2}) + (c + d \cdot \sqrt{2}) = (a+c) + (b+d) \cdot \sqrt{2} \in Q\left[\sqrt{2}\right]$

$(a + b \cdot \sqrt{2}) \cdot (c + d \cdot \sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc) \cdot \sqrt{2} \in Q\left[\sqrt{2}\right]$

קיום איברים ניטרליים: $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2}$, $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$.

קיום נגדי: $-\left(a+b\cdot\sqrt{2}\right)=-a+(-b)\cdot\sqrt{2}$

קיום הופכי: נניח כי $a+b\cdot\sqrt{2}\neq 0$

$\left(a+b\cdot\sqrt{2}\right)^{-1}=\dfrac{a+b\cdot\sqrt{2}}{\left(a+b\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(a-b\cdot\sqrt{2}\right)}=\dfrac{a+b\cdot\sqrt{2}}{a^2-2b^2}\in Q\left[\sqrt{2}\right]$, הערה:

$a+b\cdot\sqrt{2}=0$ אם"ם $a=b=0$ וביחד עם היות $\sqrt{2}$ אי רציונלי, בהכרח $a^2-2b^2\neq 0$.

ב. $Q[\sqrt{2},\sqrt{3}]=\left\{a+b\cdot\sqrt{2}+c\cdot\sqrt{3}:a,b,c\in Q\right\}$

פתרון: $Q[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ איננו שדה. נראה כי אין סגירות לכפל: נטען כי

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}\notin Q\left[\sqrt{2}\right]$. נניח בשלילה, אזי

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=a+b\cdot\sqrt{2}+c\cdot\sqrt{3}$, ולכן

$\sqrt{3}=\left(a+b\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-c\right)^{-1}\in Q\left[\sqrt{2}\right]$ כלומר, קיימים $x,y\in Q$ כך ש-

$\sqrt{3}=x+y\cdot\sqrt{2}$. לכן $3=\left(x+y\cdot\sqrt{2}\right)^2=x^2+2y^2+2xy\sqrt{2}$. קל לבדוק

כי $x,y\neq 0$, ולכן $\sqrt{2}=\dfrac{3-x^2+2y^2}{2xy}\in Q$, סתירה. לכן

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}\notin Q\left[\sqrt{2}\right]$ כדרוש, ו$Q[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ איננו שדה.

ג. $Q[\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}]=\left\{a+b\cdot\sqrt{2}+c\cdot\sqrt{3}+d\cdot\sqrt{6}:a,b,c,d\in Q\right\}$ - שדה.

כל התכונות ברורות פרט לקיום הופכי. יהי $a+b\cdot\sqrt{2}+c\cdot\sqrt{3}+d\cdot\sqrt{6}\neq 0$ ונוכיח שיש לו הופכי. מתקיים:

$$\left(a+b\cdot\sqrt{2}+c\cdot\sqrt{3}+d\cdot\sqrt{6}\right)\cdot\left(a+b\cdot\sqrt{2}-c\cdot\sqrt{3}-d\cdot\sqrt{6}\right)=\left(a+b\cdot\sqrt{2}\right)^2-\left(c\cdot\sqrt{3}+d\cdot\sqrt{6}\right)^2=$$
$$=\left(a+b\cdot\sqrt{2}\right)^2-3c^2-6d^2-6cd\sqrt{2}\in Q\left[\sqrt{2}\right]$$

ולכן

$$\frac{1}{\left(a+b\cdot\sqrt{2}+c\cdot\sqrt{3}+d\cdot\sqrt{6}\right)}=\frac{\left(a+b\cdot\sqrt{2}-c\cdot\sqrt{3}-d\cdot\sqrt{6}\right)}{\left(a+b\cdot\sqrt{2}+c\cdot\sqrt{3}+d\cdot\sqrt{6}\right)\cdot\left(a+b\cdot\sqrt{2}-c\cdot\sqrt{3}-d\cdot\sqrt{6}\right)}=$$
$$=\frac{\left(a+b\cdot\sqrt{2}-c\cdot\sqrt{3}-d\cdot\sqrt{6}\right)}{x+y\sqrt{2}}=\left(a+b\cdot\sqrt{2}-c\cdot\sqrt{3}-d\cdot\sqrt{6}\right)\cdot\left(r+s\sqrt{2}\right)\in Q\left[\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\right]$$

ולכן קיים הופכי.

נותר רק להראות כי $a+b\cdot\sqrt{2}+c\cdot\sqrt{3}+d\cdot\sqrt{6}=0$ אם"ם

$a=b=c=d=0$ אם c או d שונה מ-0 אזי $c+d\cdot\sqrt{2}\neq 0$ ולכן

$\sqrt{3}=-\dfrac{a+b\cdot\sqrt{2}}{c+d\cdot\sqrt{2}}$, בסתירה לכך ש- $\sqrt{3}\notin Q\left[\sqrt{2}\right]$. לכן $c=d=0$ ולכן

$a+b\cdot\sqrt{2}=0$ ולכן גם $a=b=0$. משל.

6. פתרו את המשוואות הבאות ב- Z_7 :

א.
$$\begin{aligned}2x-5y&=6\\x+3y&=3\end{aligned}$$

פתרון: נציב $x = 3 - 3y$ במשוואה הראשונה ונקבל
$6 = 2(3-3y) - 5y = 6 - 6y - 5y = 6 - 4y$ ולכן $y = 0$, $x = 3$

ב. $x^2 - 2 = 0$

פתרון: קל לבדוק כי $x = 3,4$ הם הפתרונות היחידים.

ג.
$$x - 5y = 6$$
$$x + 2y = 3$$

.

פתרון: נחסר את המשוואה הראשונה מהשניה ונקבל $0 = 3$, כלומר אין למערכת פיתרון.

תרגיל 4

20.11.05

1. יהי F שדה, $a \neq 0$ איבר של F, ו- n מספר טבעי. נתון כי $n \cdot a = 0$ (החיבור של a עם עצמו n פעמים). הוכיחו כי המציין של F גדול מאפס, וכי הוא מחלק את n ללא שארית.

2. פתרו את המשוואות הבאות מעל השדה Z_7 (השדה בן 7 איברים):

א. $x^2 + 3x + 2 = 0$

ב. $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 5x + 3y = 5 \end{cases}$

3. הוכחתם בתרגיל 3 ש- $Q[\sqrt{2}], Q[\sqrt{3}]$ הם שדות. האם הם איזומורפיים? נמקו.

4. מצא אוטומוריפיזים (מלבד הזהות) של השדה $Q[\sqrt{2}]$ לעצמו.

5. פתרו את מערכת המשוואות מעל הממשיים:

א. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 5y + 5z = 6 \\ 3x + 6y - z = 10 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 4y + 5z = 6 \\ 3x + 6y - z = 10 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 4y + 5z = 6 \\ 3x + 6y - z = -25 \end{cases}$

בהצלחה!

פתרון תרגיל 4

1. יהי F שדה, $a \neq 0$ איבר של F, ו- n מספר טבעי. נתון כי $n \cdot a = 0$ (החיבור של a עם עצמו n פעמים). הוכיחו כי המציין של F גדול מאפס, וכי הוא מחלק את n ללא שארית.

פתרון: נתון כי $n \cdot a = 0$ (החיבור של a עם עצמו n פעמים).
$a \neq 0$, ולכן ניתן לחלק בו, ולקבל $n \cdot 1 = 0$ (החיבור של 1 עם עצמו n פעמים).
מהגדרת מציין של שדה, נובע כי המציין של F גדול מאפס, ונסמנו p.
נחלק את n ב-p חלוקה עם שארית: $n=mp+r$ עבור $0 \leq r < p$.
אז: $0 = n \cdot 1 = (mp+r) \cdot 1 = m(p \cdot 1) + r \cdot 1 = r \cdot 1$
כלומר קבלנו ש $r \cdot 1 = 0$ עבור $0 \leq r < p$. מאחר ו- p המציין, נובע שזהו המספר החיובי המינימלי שמקיים זאת, ולכן בהכרח $r=0$.
לכן $n=mp+r=mp$, כלומר p מחלק את n ללא שארית.

2. פתרו את המשוואות הבאות מעל השדה Z_7 (השדה בן 7 איברים):

א. $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{2-1}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = 5,6$$

ב. $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$ (כפלנו שורה א' ב-2).
נחסר שורה א' משורה ב', ונקבל: 2y=4 ולכן y=2.
נציב בשורה א': x=2y+6=4+6=3 .

ג. $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 5x + 3y = 5 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 5x + 6y = 0 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$ (כפלנו שורה א' ב-3, ושורה ב' ב-2)
נחסר שורה ב' משורה א', ונקבל 2x=4 ולכן x=2.
נציב בשורה א': $1 + 2y = 0 \quad \Leftarrow \quad 2y = 6 \quad \Leftarrow \quad y = 3$

3. הוכחתם בתרגיל 3 ש-$Q[\sqrt{2}], Q[\sqrt{3}]$ הם שדות. האם הם איזומורפיים? נמקו.

פתרון: השדות אינם איזומורפיים.
הוכחה: נניח בשלילה כי קיים איזומורפיזם $f : Q[\sqrt{2}] \rightarrow Q[\sqrt{3}]$.

מכיוון ש- $f(1) = 1$ אזי נקבל שלכל $n \in N$ - מתקיים $f(n) = n$, וכן מתקיים
$0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n) = n + f(-n)$, זה גורר ש- $f(-n) = -n$,
ולכן נקבל שלכל $z \in Z$ מתקיים $f(z) = z$
בנוסף $1 = f(z \cdot z^{-1}) = f(z) \cdot f(z^{-1}) = z \cdot f(z^{-1})$ ולכן $f(z^{-1}) = z^{-1}$.

מסקנה: לכל $q \in Q$, מתקיים $f(q) = q$.

כעת נבדוק לאן f מעתיקה את $\sqrt{2}$. נסמן $f(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}$ for some $a, b \in Q$.

ברור ש- $b \neq 0$ כי אחרת נקבל ש - $f(\sqrt{2}) = a \in Q$ והרי f היא פונקציה חח"ע ו-
$f(a) = a$

מכיוון שלפי ההנחה - f איזומרפיזיים של שדות על כן מתקיים

$$2 = f(2) = f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{3})(a + b\sqrt{3}) = a^2 + 3b^2 + 2\sqrt{3}ab$$

אם $a \neq 0$ נקבל $2 = a^2 + 3b^2 + 2\sqrt{3}ab \Leftrightarrow \sqrt{3} = \dfrac{2 - 3b^2}{2ab}$ ומכיוון ש- $a, b \in Q$ נקבל ש- $\sqrt{3} \in Q$ וזה סתירה.

אם $a = 0$ נקבל $2 = 3b^2$ כלומר $b = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ומכיוון ש- $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ הוא מספר אי-ראציונלי קיבלנו סתירה.

4. מצא אוטומוריפיזים (מלבד הזהות) של השדה $Q[\sqrt{2}]$ לעצמו.

פתרון: נגדיר $f : Q[\sqrt{2}] \to Q[\sqrt{2}]$ באופן הבא: $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$.

נראה שזה אוטומורפיזים.
הומומורפיזים: $f(1) = 1$
כפל:

$$f((a_1 + b_2\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2})) = f((a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} = (a_1 - b_2\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2}) = f(a_1 + b_2\sqrt{2})f(a_2 + b_2\sqrt{2})$$

חיבור:

$$f((a_1 + b_2\sqrt{2} + a_2 + b_2\sqrt{2})) = f((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\sqrt{2} = (a_1 - b_1\sqrt{2}) + (a_2 - b_2\sqrt{2}) = f(a_1 + b_2\sqrt{2}) + f(a_2 + b_2\sqrt{2})$$

חח"ע: יהיו $a_1 + b_1\sqrt{2}, a_2 + b_2\sqrt{2} \in Q[\sqrt{2}]$, נניח כי
$f(a_1 + b_1\sqrt{2}) = f(a_2 + b_2\sqrt{2})$ אזי
$f(a_1 + b_1\sqrt{2}) = a_1 - b_1\sqrt{2} = a_2 - b_2\sqrt{2} = f(a_2 + b_2\sqrt{2})$ כלומר נקבל
$a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2}$.

על:יהי $a + b\sqrt{2} \in Q[\sqrt{2}]$ ניקח $a - b\sqrt{2}$ ונקבל $f(a - b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$.

5. פתרו את מערכת המשוואות מעל הממשיים:

א. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+5y+5z=6 \\ 3x+6y-z=10 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+4y+5z=6 \\ 3x+6y-z=10 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+4y+5z=6 \\ 3x+6y-z=-25 \end{cases}$

פתרון:

א.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\leftarrow R_2-2R_1,R_3\leftarrow R_2-3R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\leftarrow\frac{-1}{10}R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1\leftarrow R_1-2R_2,R_1\leftarrow R_1-5R_3,R_2\leftarrow R_2+R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

במקרה זה כל המשתנים מובילים. אין משתנים חופשיים, ולכן יש למערכת המשוואות הליניאריות הנ"ל יש פתרון יחיד. הפתרון הוא: $x=\frac{21}{2}, y=\frac{-7}{2}, z=\frac{1}{2}$.

ב.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\leftarrow R_2-2R_1,R_3\leftarrow R_3-3R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-10R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{array}\right)$$

נשים לב שבשורה האחרונה קיבלנו $0\cdot z=35$ וזה לא יתכן, כלומר למערכת המשוואות הנ"ל אין פתרון.

ג.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & -1 & -25 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\leftarrow R_2-2R_1,R_3\leftarrow R_3-3R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -40 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-10R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת אפסים נמשיך $\xrightarrow[R_2\leftarrow(-1)R_2,R_1\leftarrow R_1+3R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

קיבלנו משתנה חופשי y . y יכול לקבל שרירותי בממשיים. אם $t=t\in R$ אז נקבעים ערכים לשאר המשתנים: $\begin{array}{l} x=-7-2y=-7-2t \\ z=4 \end{array}$.

פתרון כללי: $t \in R \quad (x, y, z) = (-7 - 2t, t, 4)$

בהצלחה!

אלגברה לינארית 1
תרגיל 5

1. נתבונן באוסף השלשות $L=\{(a,b,c)\in R:3a+b-2c=0\}$. נגדיר על L פעולת חיבור $(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,b+e,c+f)$, ופעולת כפל בסקלר $t(a,b,c)=(ta,tb,tc)$. הוכיחו כי L עם הפעולות שהגדרנו הוא מרחב וקטורי מעל R.

2. יהי V מרחב וקטורי מעל Z_2, השדה בן שני איברים. הוכיחו כי לכל $v\in V$ מתקיים $v+v=0$.

3. עבור קבוצה כלשהי X נסמן ב- $P(X)$ את אוסף תתי הקבוצות של X. עבור שתי קבוצות $A,B\in P(X)$ נגדיר את ההפרש הסימטרי של A ו-B ע"י $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. הראו כי בכך הגדרנו על $P(X)$ מבנה של מרחב וקטורי מעל Z_2.
רמז: העזרו בשאלה 3

4. האם ניתן להגדיר על Z_4 מבנה של מרחב וקטורי מעל Z_2?
רמז: העזרו בשאלה 3

5. בהינתן שתי פונקציות $f,g:R\to R$, נגדיר את פונקציית הסכום $f+g:R\to R$ ע"י $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$. וכן, ל- $t\in R$, נגדיר $tf:R\to R$ ע"י $(tf)(x)=t\cdot f(x)$.
קבעו האם הקבוצות הבאות הן מרחבים וקטורים מעל R ביחס לפעולות שהגדרנו.
הוכיחו או הפריכו בקצרה את תשובתכם.

א. $A=\{f:R\to R\}$ (אוסף כל הפונקציות מ-R ל-R)
ב. $B=\{f:R\to R,\ f(8)=1\}$ (אוסף הפונקציות מ-R ל-R שערכן ב-8 הוא 1)
ג. $C=\{f:R\to R,\ f(8)=0\}$

אלגברה לינארית 1
פתרון תרגיל 5

1. נתבונן באוסף השלשות $L=\{(a,b,c)\in R: 3a+b-2c=0\}$. נגדיר על L פעולת חיבור $(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,b+e,c+f)$, ופעולת כפל בסקלר $t(a,b,c)=(ta,tb,tc)$. הוכיחו כי L עם הפעולות שהגדרנו הוא מרחב וקטורי מעל R.

פתרון: מאחר ו $L\subseteq R^3$, כדי להראות שזהו מרחב וקטורי, מספיק להראות ש-L תת מרחב. כלומר, יש להראות סגירות לחיבור ולכפל בסקלר.

יהיו $(a,b,c),(d,e,f)\in L$ כלומר $3a+b-2c=0,\ 3d+e-2f=0$ ויהי $t\in R$. אזי:

- $3(a+d)+(b+e)-2(c+f)=(3a+b-2c)+(3d+e-2f)=0$, לכן $(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,b+e,c+f)\in L$.
- $3(ta)+tb-2(tc)=t(3a+b-2c)=0$, לכן $t(a,b,c)=(ta,tb,tc)\in L$.

לכן L תת מרחב של R^3, ובפרט זהו מרחב וקטורי מעל R.

2. יהי V מרחב וקטורי מעל Z_2, השדה בן שני איברים. הוכיחו כי לכל $v\in V$ מתקיים $v+v=0$.

פתרון: ראשית נראה כי לכל $v\in V$, $0\cdot v=0$ (הכוונה היא ל $0_F\cdot v=0_V$).

ובכן, $0\cdot v=(0+0)\cdot v=0\cdot v+0\cdot v$. כלומר, $0\cdot v$ נייטרלי לחיבור. מיחידותו של האיבר הנייטרלי לחיבור במרחב וקטורי, נובע כי $0\cdot v=0$.

כעת, יהי $v\in V$. אזי $v+v=(1+1)\cdot v=0\cdot v=0$, כי Z_2 ממציין 2, ולכן 1+1=0.

3. עבור קבוצה כלשהי X נסמן ב- $P(X)$ את אוסף תתי הקבוצות של X. עבור שתי קבוצות $A,B\in P(X)$ נגדיר את ההפרש הסימטרי של A ו-B ע"י $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. הראו כי בכך הגדרנו על $P(X)$ מבנה של מרחב וקטורי מעל Z_2.

פתרון: נגדיר חיבור בין $A,B\in P(X)$ כהפרש הסימטרי ביניהן. ונגדיר כפל בסקלר מ- Z_2 ע"י: $0\cdot A=\phi$ ו- $1\cdot A=A$ לכל $A\in P(X)$. נראה כי $P(X)$ עם הפעולות הללו מהווה מרחב וקטורי מעל Z_2.

- קשירות לחיבור : אם $A,B\in P(X)$ אזי גם $A\Delta B\in P(X)$.
- קומוטטיביות: $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(B\cup A)\setminus(B\cap A)=B\Delta A$.
- אסוציטיביות: ניתן לראות, ע"י שרטוט דיאגרמה ש $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)=$ אוסף האיברים שנמצאים באחת או בשלוש מהקבוצות A,B,C אך לא רק בשתיים מהן.
- קיום איבר ניטרלי לחיבור: האיבר הנייטרלי לחיבור הוא $\phi\in P(X)$.

ואכן, לכל $A\in P(X)$ מתקיים: $A\Delta\phi=(A\cup\phi)\setminus(A\cap\phi)=A\setminus\phi=A$.

- קיום נגדי" ע"פ שאלה 2, האיבר הנגדי ל- $A \in P(X)$ הוא A. ואכן, $A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \phi$
- קשירות לכפל בסקלר:אם $A \in P(X)$, אז כמובן $0 \cdot A = \phi \in P(X)$ ו- $1 \cdot A = A \in P(X)$
- $A, B \in P(X)$ אזי $0(A \Delta B) = 0 = (0 \cdot A) \Delta (0 \cdot B)$ ו- $1(A \Delta B) = A \Delta B = (1 \cdot A) \Delta (1 \cdot B)$. כלומר $t(A \Delta B) = (tA) \Delta (tB)$ לכל $t \in Z_2$.
- לכל $t, s \in Z_2$ ולכל $A \in P(X)$ מתקיים $(t+s)A = tA + sA$ - בדיקה מיידית עבור כל אחד מהמיקרים: $t = s = 1$; $t = 1, s = 0$; $t = 0, s = 1$; $t = s = 0$.
- לכל $t, s \in Z_2$ ולכל $A \in P(X)$ מתקיים $(ts)A = t(sA)$ - כנ"ל.
- לכל $A \in P(X)$ מתקיים $1 \cdot A = A$, ע"פ הגדרה.

לכן $P(X)$ עם הפעולות שהגדרנו מהווה מרחב וקטורי מעל Z_2.

4. האם ניתן להגדיר על Z_4 מבנה של מרחב וקטורי מעל Z_2?

פתרון: לא. שכן, אם V מרחב וקטורי מעל Z_2 אזי לכל $v \in V$ מתקיים $v + v = 0$.

ואילו ב- Z_4 יש איברים שאינם נגדיים לעצמם:
$$1 + 1 = 2 \neq 0 (\text{mod}\, 4),$$
$$3 + 3 \equiv 2 \neq 0 (\text{mod}\, 4)$$

5. בהינתן שתי פונקציות $f, g : R \to R$, נגדיר את פונקציית הסכום $f + g : R \to R$ ע"י $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. וכן, ל- $t \in R$, נגדיר $tf : R \to R$ ע"י $(tf)(x) = t \cdot f(x)$.
קבעו האם הקבוצות הבאות הן מרחבים וקטורים מעל R ביחס לפעולות שהגדרנו.

א. $A = \{f : R \to R\}$ (אוסף כל הפונקציות מ-R ל-R)

כן: סגירות לחיבור וכפל בסקלר נובעת מההגדרה. בנוסף, יש לבדוק התקיימות כל התכונות, כמו בשאלה 4.

ב. $B = \{f : R \to R,\ f(8) = 1\}$ (אוסף הפונקציות מ-R ל-R שערכן ב-8 הוא 1)

לא: אין סגירות לחיבור ולכפל בסקלר. למשל, אם $f, g \in B$, כלומר $f(8) = g(8) = 1$ אזי $(f+g)(8) = f(8) + g(8) = 1 + 1 = 2$, לכן $f + g \notin B$

ג. $C = \{f : R \to R,\ f(8) = 0\}$

כן: מאחר ו $C \subseteq A$ ו-A מרחב וקטורי, מספיק להראות ש-C תת מרחב. ואכן:
סגירות לחיבור: $f, g \in C$, כלומר $f(8) = g(8) = 0$ אזי $(f+g)(8) = f(8) + g(8) = 0 + 0 = 0$, לכן $f + g \in C$.
סגירות לכפל בסקלר: $(tf)(8) = t \cdot f(8) = t \cdot 0 = 0$, ולכן $tf \in C$ לכל $t \in R,\ f \in C$.
לכן זהו תת מרחב של A, ובפרט זהו מרחב וקטורי מעל R.

אלגברה לינארית 1 – תרגיל 6

1. יהיו $(v_1,...,v_n)$ וקטורים בת"ל מעל מרחב לינארי V. הראו כי לכל λ ולכל $i \neq j$ גם $(v_1,...,v_i+\lambda v_j,...,v_n)$ בת"ל. (החלפנו רק את v_i)

2. א. האם הוקטורים הבאים ב- $\mathbb{R}^3$ תלויים לינארית?
   1) (3,1,0), (1,0,2), (-4,1,4)
   2) (3,1,0), (1,0,2), (3,2,-6)

ב. יהי A מרחב הפונקציות הממשיות מתרגיל 5 שאלה 5.א. האם הפונקציות הבאות תלויות לינארית מעל $\mathbb{R}$ במרחב A ?
   1) $f_1(t)=1, f_2(t)=t, f_3(t)=t^2$
   2) $f_1(t)=1-t, f_2(t)=t(1-t), f_3(t)=1-t^2$

ג. האם $v_1=(1,0,1), v_2=(i,1,0), v_3=(i,2,1+i)$ תלויים לינארית מעל $\mathbb{C}$? (כוקטורים ב $\mathbb{C}^3$)
הציגו את הוקטור (1,2,3) כצירוף לינארי של v_1,v_2,v_3.

3. יהי $P=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}$ אוסף המספרים הממשיים החיוביים.
נגדיר פעולת חיבור באופן הבא: $\forall x,y\in P, x\oplus y=xy$ (כלומר ה"חיבור" של שני איברים הוא מכפלתם ב- $\mathbb{R}$) וכן לכל $\lambda\in\mathbb{R}, x\in P$ $\lambda\bullet x=x^\lambda$.
א. הראו כי P מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$ לפי פעולות אלו.
ב. הראו כי לכל $a\in P, a\neq 0$ מתקיים $P=\{\lambda a:\lambda\in\mathbb{R}\}$
ג. יהי V מרחב לינארי מעל שדה F ויהי $F'\subset F$ תת שדה. הראו (בקצרה) כי V (כקבוצה) מרחב וקטורי מעל F'. (עבור אותה פעולת חיבור, והכפל בסקלר מוגדר לפי הכפל מעל F)
ד. נתבונן על P כעל מרחב לינארי מעל $\mathbb{Q}$. הראו שכל מספר רציונלי חיובי ניתן להצגה באופן יחיד כצירוף לינארי של מספרים ראשוניים מעל $\mathbb{Q}$. (רמז – המשפט היסודי של האריתמטיקה)

4. יהי V מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$. ויהי $V\times V=\{(x,y): x,y\in V\}$ - אוסף הזוגות של איברים מ- V. הראו כי ניתן להגדיר על $V\times V$ מבנה של מרחב לינארי מעל $\mathbb{C}$ בעזרת הפעולות הבאות:
א. $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
ב. $\forall z\in\mathbb{C}, z=a+bi$ $\quad z\cdot(x,y)=(a+bi)\cdot(x,y)=(ax-by,ay+bx)$

פתרון ממ"ן 16 - אלגברה לינארית I

1. $v_1,\dots,v_n \in V$ בת"ל מעל F.

צ"ל $\forall\lambda\in F$ הוקטורים $v_1,\dots,v_{i-1},v_i+\lambda v_j,\dots,v_n$ בת"ל. $(i\neq j)$

<u>הוכחה:</u> נניח ש- $0=a_1v_1+\dots+a_jv_j+\dots+a_i(v_i+\lambda v_j)+\dots+a_nv_n$ $\quad a_i\in F$

אז $0=a_1v_1+\dots+(a_j+a_i\lambda)v_j+\dots+a_iv_i+\dots+a_nv_n$

אבל מכיוון ש- $v_1\dots v_n$ בת"ל כל המקדמים צריכים להיות אפס.

לכן $a_k=0$ $\forall k\neq j$ וכן $a_j+a_i\lambda=0$, אבל $a_i=0$ ולכן גם $a_j=0$.

~~[illegible]~~ כלומר $a_k=0$ $1\le k\le m$, והוקטורים ~~[illegible]~~

$v_1,\dots,v_i+\lambda v_j,\dots,v_m$ בת"ל.

2. א. 1. האם הוקטורים $(-4,1,4),(1,0,2),(3,1,0)$ בת"ל מעל $\mathbb{R}$?

נניח קיום סקלרים כך ש: $a_1(-4,1,4)+a_2(1,0,2)+a_3(3,1,0)=(0,0,0)$

זה מוביל לכך שלכל קואורדינטה מקבלים את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{aligned}-4a_1+a_2+3a_3&=0\\ a_1\qquad+a_3&=0\\ 4a_1+2a_2\qquad&=0\end{aligned}$$

בכתיבה אחרת:

$$\begin{pmatrix}-4&1&3&0\\1&0&1&0\\4&2&0&0\end{pmatrix}\overset{R_2\to4R_2}{\sim}\begin{pmatrix}-4&1&3&0\\4&0&4&0\\4&2&0&0\end{pmatrix}\underset{R_3+R_1}{\overset{R_2+R_1}{\sim}}\begin{pmatrix}-4&1&3&0\\0&1&7&0\\0&3&3&0\end{pmatrix}\overset{R_3-3R_2}{\sim}\begin{pmatrix}-4&1&3&0\\0&1&7&0\\0&0&-18&0\end{pmatrix}$$

לכן: $-18a_3=0 \Leftarrow a_3=0$, $a_2+7a_3=0 \Leftarrow a_2=0$

$-4a_1+a_2+3a_3=0 \Rightarrow a_1=0$, כלומר $(a_1,a_2,a_3)=(0,0,0)$

הפתרון יחיד, ולכן הוקטורים בת"ל.

2. האם הוקטורים $(3,2,-6),(1,0,2),(3,1,0)$ בת"ל מעל $\mathbb{R}$?

נניח $0=a_1(3,2,-6)+a_2(1,0,2)+a_3(3,1,0)$

מקבלים מערכת משוואות:

$$\begin{aligned}3a_1+a_2+3a_3&=0\\ 2a_1\qquad+a_3&=0\\ -6a_1+2a_2\qquad&=0\end{aligned}$$

$\leftarrow$

נדרג מטריצה:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2\to 3R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3+2R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_3+2R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן: $-2a_2-3a_3=0 \Rightarrow a_3=-\frac{2}{3}a_2$.

$3a_1+a_2+3a_3=0 \Rightarrow 3a_1-a_2=0 \Rightarrow a_1=\frac{1}{3}a_2$

לכן הפתרונות למערכת הם מהצורה $(t,3t,-2t)$ $t\in\mathbb{R}$

ובפרט אם נבחר $a_1=1$ $a_2=3$ $a_3=-2$ ונקבל צירוף

לינארי לא טריוויאלי & הוקטורים שווה אפס,

לכן הוקטורים ~~[illegible]~~ תלויים לינארית מעל $\mathbb{R}$.

ב. האם הפונקציות הבאות בלתי תלויות לינארית מעל $\mathbb{R}$ במרחב הפונקציות $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$?

1. $f_1(t)=1$ $f_2(t)=t$ $f_3(t)=t^2$.

נניח $0=af_1(t)+bf_2(t)+cf_3(t)$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$

אזי השוויון הזה הוא שוויון פונקציות $0(t)=0$ $\forall t\in\mathbb{R}$.

לכן לכל t מתקיים: $a+bt+ct^2=0$.

אם $c\neq0$ מתקבלת משוואה ריבועית ולה לכל היותר

שני פתרונות - לכן כיוון שזה נכון לכל t, $c=0$, אם $b\neq0$

יש רק פתרון אחד. לכן $b=0$, אבל אז מתקיים גם $a=0$.

לכן הפונקציות בת"ל מעל $\mathbb{R}$.

2. $f_1(t)=1-t$, $f_2(t)=t(1-t)$, $f_3(t)=1-t^2$.

נניח ש- $0=a(1-t)+b(t(1-t))+c(1-t^2)$ $\forall t\in\mathbb{R}$,

אז $a-at+bt-bt^2+c-ct^2=0$ $= (a+c)\cdot 1+(b-a)t-(b+c)t^2$

מסעיף 1 נובע שהמקדמים של $1,t,t^2$ שווים לאפס, ומכאן:

$a=b=-c$, לכן עבור למשל $a=b=1$, $c=-1$, מתקבלת

תלות לינארית של f_1,f_2,f_3.

ג. נתון $v_1=(1,0,1)$, $v_2=(i,1,0)$, $v_3=(i,2,1+i)$

האם בת"ל מעל $\mathbb{C}$?

נניח ש-

$$a_1(1,0,1)+a_2(i,1,0)+a_3(i,2,1+i)=(0,0,0)$$

נקבל מערכת משוואות הומוגנית (מעל $\mathbb{C}$)

נרשום את המטריצה המתאימה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & i & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1+i & 0 \end{pmatrix} \overset{R_3-R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & i & i & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_3+iR_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & i & i & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2i & 0 \end{pmatrix}$$

לכן: $(1+2i)a_3=0 \Leftarrow a_3=0$ ולכן גם $a_2=a_1=0$,

לכן הווקטורים בת"ל.

- נציג את הווקטור $(1,2,3)$ כצירוף לינארי של v_1,v_2,v_3.

$$c_1(1,0,1)+c_2(i,0,1)+c_3(i,2,1+i)=(1,2,3)$$

נקבל מערכת משוואות אי-הומוגנית:

$$c_1+ic_2+ic_3=1$$
$$a_2+2c_3=2$$
$$c_1 \quad +(1+i)c_3=3$$

ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & i & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1+i & 3 \end{pmatrix} \overset{R_3-R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & i & i & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -i & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_3+iR_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & i & i & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1+2i & 2+2i \end{pmatrix}$$

לכן $(1+2i)c_3=2+2i \Rightarrow c_3=\frac{6-2i}{5}$

$c_2=2-2c_3=\frac{-2+4i}{5}$, $c_1=1-ic_2-ic_3=\frac{7-4i}{5}$

לכן: $\frac{7-4i}{5}(1,0,1)+\frac{-2+4i}{5}(i,1,0)+\frac{6-2i}{5}(i,2,1+i)=(1,2,3)$

(בדקתי!)

3. א. $P=\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$ נגדיר פעולות $x\oplus y=xy$

וכפל בסקלר מ $\mathbb{R}$: $\lambda\cdot x=x^{\lambda}$.

נראה כי זהו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$:

סגירות: $\forall x,y\in P \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \quad x\oplus y=xy\in P \quad \lambda\cdot x=x^{\lambda}\in P$.

תכונות החיבור: 1. קומוטטיביות ואסוציאטיביות נובעות מקומוטטיביות ואסוציאטיביות הכפל ב $\mathbb{R}$.

2. איבר ניטרלי לחיבור הוא $1\in P$, $x\oplus 1=x\cdot 1=x$, $\forall x\in P$.

לכל $x\in P$ האיבר הנגדי הוא $x^{-1}\in P$ $\quad x\oplus x^{-1}=x\cdot x^{-1}=1$.

תכונות הכפל בסקלר: $\quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall x,y\in P$

1. $(\lambda+\mu)\cdot x=x^{\lambda+\mu}=x^{\lambda}x^{\mu}=\lambda\cdot x\oplus\mu\cdot x$

2. $\lambda(x\oplus y)=\lambda\cdot(xy)=(xy)^{\lambda}=x^{\lambda}y^{\lambda}=(\lambda\cdot x)\oplus(\lambda\cdot y)$

3. $(\lambda\mu)x=x^{\lambda\mu}=(x^{\mu})^{\lambda}=\lambda\cdot(x^{\mu})=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$

4. $1\cdot x=x^{1}=x$.

ב. נראה: לכל $0_P\neq a\in P$ מתקיים $P=\{\lambda\cdot a : \lambda\in\mathbb{R}\}$, $\quad (a\neq 0_P=1\in\mathbb{R})$

כי: $1\neq a\in P$ ו $x\in P$ כלשהו. אזי קיים $\lambda\in\mathbb{R}$

כך ש- $\lambda\cdot a=a^{\lambda}=x$, ובמקרה כזה: $\lambda=\log_a x$.

5. V מ"ו מעל F, $F'\subset F$ תת שדה של F.

הוכחה לטענה שצריך: הסגירות לחיבור וסגירות הכפל בסקלר

מתקיימות כי F' מוכל ב F ו V מ"ו מעל F'.

מיון של [illegible] התכונות החיבוריות מתקיימות כל התכונות

כמו כן, מיון התכונות F' נובעות כל איברי V

הנדרשים לחיבור.

האיברים שבו סגורים F כמו שכל תכונות של

התכונות הכפליות, [illegible] אם $\lambda,\mu\in F'$ אז $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$

לכל V כי [illegible] לכל שני איברים ב F, ובפרט ב F')

3. נוכיח תחילה שכל מספר רציונלי חיובי a ניתן להצגה (באופן יחיד) כצירוף ליניארי של הראשוניים במרחב P מעל R.

נניח תחילה כי $a\in\mathbb{N}$.

המשפט היסודי של האריתמטיקה אומר כי a ניתן להצגה כמכפלת ראשוניים $a=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ (p_i ראשוניים, $a_i\in\mathbb{N}$)

והצגה זו יחידה עד כדי שינוי סדר הראשוניים.

אך במרחב שלנו זה שווה בדיוק ל- $a_1\cdot p_1\oplus a_2\cdot p_2\oplus\ldots\oplus a_r\cdot p_r$,

לכן אפשר להציג את a כצירוף ליניארי של ראשוניים.

אם $a\in\mathbb{Q}$, $a=\frac{m}{n}$ $(m,n\in\mathbb{N})$, נניח $m=p_1^{b_1}\cdots p_r^{b_r}$

$n=q_1^{c_1}\cdots q_s^{c_s}$

אז $a=p_1^{b_1}\cdots p_r^{b_r}\cdot q_1^{-c_1}\cdots q_s^{-c_s}$

כלומר יש צירוף ליניארי (עם מקדמים שלמים)

$$a=\sum_{i=1}^{r} b_i\cdot p_i + \sum_{i=1}^{s}(-c_i)\cdot q_i$$

נראה כעת שההצגה יחידה:

נניח שוב תחילה ש $a\in\mathbb{N}$. $a=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$

וקיימת הצגה אחרת $a=q_1^{r_1}\cdots q_s^{r_s}$ (q_i ראשוניים, $r_i\in\mathbb{Q}$)

נסמן $r_i=\frac{m_i}{n_i}$, $m_i\in\mathbb{Z}$, $n_i\in\mathbb{N}$.

נקבל: $q_1^{\frac{m_1}{n_1}}\cdot q_2^{\frac{m_2}{n_2}}\cdots q_s^{\frac{m_s}{n_s}}=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$

נעלה בחזקת $\prod_{i=1}^{s} n_i$ ונקבל:

$$X = q_1^{m_1\prod_{j\neq1}n_j}\cdot q_2^{m_2\prod_{j\neq2}n_j}\cdots q^{m_s\prod_{j\neq s}n_j}=p_1^{a_1\prod_{j=1}^{s}n_j}\cdots p_r^{a_r\prod_{j=1}^{s}n_j}$$

החזקות הן כולן מספרים שלמים, בנוסף, באגף ימין הן כולן חיוביות,

לכן X הוא מספר טבעי, ונוכל להניח באגף שמאל

שאר כל החזקות חיוביות (אם יש m_i-ים שליליים אז נעביר את $q_i^{m_i\prod_{j\neq i}}$)

המשפט היסודי של האריתמטיקה ויחידות ההצגה של X כמכפלת ראשוניים מוכיחה, כפי ש $r=s$, ובה"כ: $q_1=p_1,\ldots,q_r=p_r$

ו- $a_1\prod_{j=1}^{r} n_j = m_1\prod_{j\neq1} n_j \ldots a_r\prod_{j=1}^{r} n_j = m_r\prod_{j\neq r} n_j$ ←

נכפול את כל המשוואות ב- $\prod_{j=1}^{r} m_j$ ונקבל:

$a_1=\frac{m_1}{n_1}$ ... $a_r=\frac{m_r}{n_r}$. לכן יש פתרונות שלמים.

נניח ש- $a\in\mathbb{Q}$, $a=\frac{m}{n}$, ונניח ש- m ו- n זרים

(כלומר אין מספר ראשוני p כך ש- $p|m$ ו- $p|n$)

נניח $m=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ $\quad n=q_1^{b_1}\cdots q_s^{b_s}$ $\quad (a_i,b_i\in\mathbb{N})$

מכיוון ש- m ו- n זרים לכל i ו-j p_i ו-q_j שונים (p_i, q_j ראשוניים)

אחרת. (אם $p_i=q_j$ אז $p_i|m$, $p_i|n$)

$a=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}\cdot q_1^{-b_1}\cdots q_s^{-b_s}$.

נניח שיש הצגה נוספת: $a=(p_1')^{r_1}\cdot(p_2')^{r_2}\cdots(p_t')^{r_t}$

$(r_i\in\mathbb{Q})$, אזי: $p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}\cdot q_1^{-b_1}\cdots q_s^{-b_s}=(p_1')^{r_1}\cdots(p_t')^{r_t}$.

לכן $m=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}=(p_1')^{r_1}\cdots(p_t')^{r_t}\cdot q_1^{b_1}\cdots q_s^{b_s}$

אבל הוכחנו את יחידות ההצגה כמכפלת ראשוניים בטבעיים,

לכן בצד ימין בהכרח לא יופיעו הראשוניים $p_1\ldots p_r$

במכפלה המאוחדת, אלא $\{q_j\}$ שונים מכולם מ- $\{p_i\}$

לכן הם בהכרח להצטמצם עם q_j ואין לא שלמים

$q_1^{-b_1}\cdots q_s^{-b_s}$, ואילו המספרים הנותרים הם בדיוק $p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$,

לכן בהכרח $t=s+r$, וכ"כ $p_i'=p_i$, $r_i=a_i$, $1\le i\le r$

וכן- $p_{r+i}'=q_i$, $r_{r+i}=-b_i$, $1\le i\le s$.

4. V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. נגדיר פעולות חיבור & כפל בסקלר מעל $\mathbb{C}$ ל- $V\times V$ בצורה הבאה:

$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ $\quad x_1,x_2,y_1,y_2\in V$

$z(x,y)=(ax-by,ay+bx)$ $\quad z=a+bi,\ x,y\in V$

$\leftarrow$

א. סגירות תחת חיבור וכפל בסקלר נובעת מסגירות החיבור והכפל ב V:

$$x_1,x_2,y_1,y_2\in V \Rightarrow x_1+x_2,\ y_1+y_2\in V \Rightarrow (x_1+x_2,\ y_1+y_2)\in V\times V$$

$$\begin{matrix} x,y\in V \\ z=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}\end{matrix} \Rightarrow ax-by,\ ay+bx\in V \Rightarrow (ax-by,\ ay+bx)\in V\times V$$

ב. קומוטטיביות ואסוציאטיביות ודיסטריביוטיביות נובעות מהקומוטטיביות ואסוציאטיביות ודיסטריביוטיביות ב-V.

ג. אם $0_V\in V$ איבר האפס ב V אז $(0_V,0_V)\in V\times V$ איבר האפס של $V\times V$.

ד. אם $(x,y)\in V\times V$, בנוסף $-(x,y)=(-x,-y)$, הנגדי שלו שייך.

ה. ברור $1\in\mathbb{C}$ $1\cdot(x,y)=(x,y)$ (נובע מההגדרה של כפל בסקלר)

ו. יהיו $a+bi,\ c+di\in\mathbb{C}$ ($a,b,c,d\in\mathbb{R}$) אזי:

$$((a+bi)+(c+di))(x,y)=((a+c)+(b+d)i)(x,y)=((a+c)x-(b+d)y,\ (a+c)y+(b+d)x)$$
$$=((ax-by)+(cx-dy),\ (ay+bx)+(cy+dx))=(ax-by,\ ay+bx)\ldots$$
$$\ldots+(cx-dy,\ cy+dx)=(a+bi)(x,y)+(c+di)(x,y)$$

ז. מצד:

$$((a+bi)(c+di))(x,y)=((ac-bd)+(bc+ad)i)(x,y)$$
$$=((ac-bd)x-(bc+ad)y,\ (ac-bd)y+(bc+ad)x)$$

מאידך:

$$(a+bi)[(c+di)(x,y)]=(a+bi)(cx-dy,\ cy+dx)$$
$$=(a(cx-dy)-b(cy+dx),\ a(cy+dx)+b(cx-dy))$$
$$=((ac-bd)x-(bc+ad)y,\ (ac-bd)y+(bc+ad)x)$$

כלומר:

$$((a+bi)(c+di))(x,y)=(a+bi)[(c+di)(x,y)]$$

ח.

$$(a+bi)[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]=(a+bi)(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$
$$=(a(x_1+x_2)-b(y_1+y_2),\ a(y_1+y_2)+b(x_1+x_2))$$
$$=(ax_1-by_1,\ ay_1+bx_1)+(ax_2-by_2,\ ay_2+bx_2)$$
$$=(a+bi)(x_1,y_1)+(a+bi)(x_2,y_2)$$

אלגברה ליניארית 1 תשס"ו – תרגיל מס' 7

1. יהא V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו $\{v_1,v_2,v_3\}$ וקטורים ב- V.
   א. הוכיחו כי אם הוקטורים $\{v_1,v_2,v_3\}$ בת"ל והמציין של F שונה מ-2 אזי גם הוקטורים: $\{v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_1\}$ הם בת"ל. הראו בנוסף כי:
   $span\{v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_1\}=span\{v_1,v_2,v_3\}$
   ב. הראו כי אם המציין של F הוא 2 אזי הוקטורים $\{v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_1\}$ תלויים ליניארית.
2. נתונים הוקטורים: $v_1=(1,1,1),v_2=(1,1,-2)$ במרחב $\Re^3$, הראו כי וקטורים אלו בת"ל ומיצאו וקטור $v_3\in\Re^3$ כך ש- v_1,v_2,v_3 מהווים בסיס של $\Re^3$. הוכיחו את תשובתכם.
3. נתונים הוקטורים: $v_1=(1,1,2),v_2=(1,2,1),v_3=(2,1,1),v_4=(1,1,1)$ במרחב $\Re^3$. הראו כי וקטורים אלו פורשים את $\Re^3$, ומיצאו תת-קבוצה של $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ המהווה בסיס ל- $\Re^3$.
4. מיצאו בסיסים לתתי-המרחבים הבאים:
   א. $W=\{(a,b,c)\mid 3a+2b+c=0\}$ מעל השדה Z_{11}, כלומר W הוא תת-מרחב של $(Z_{11})^3$.
   ב. יהא $C^3[x]=\{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\mid a_i\in C\}$ כלומר מרחב הפולינומים המרוכבים ממעלה לכל היותר 3. ויהא $W\subseteq C^3[x]$ תת המרחב:
   $W=\{p(x)\in C^3[x]\mid p(1)=p(0)=0\}$ (כלומר כל הפולינומים ממעלה ≤ 3 המתאפסים ב-0 וב-1) מיצאו בסיס ל- W.
5. נקבע זווית θ ונתבונן בוקטורים: $v_1=(\cos\theta,\sin\theta),v_2=(\sin\theta,-\cos\theta)$ במרחב $\Re^2$.
   א. הוכיחו כי v_1,v_2 הם בסיס של $\Re^2$.
   ב. עבור וקטור $u=(x,y)$, מיצאו a ו- b (התלויים כמובן ב- x ו- y) כך ש- $u=a\cdot v_1+b\cdot v_2$.
6. יהא V מרחב סדרות פיבונצ'י מעל הממשיים, כלומר:
   $V=\{(a_1,a_2,a_3,...)\mid a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\}$ עם פעולות חיבור וקטורים וכפל בסקלר כפי שראינו בתירגול.
   א. הוכיחו כי מימד V הוא 2 (כלומר קיים בסיס בגודל 2).
   ב. מיצאו בסיס ל- V המורכב מסדרות הנדסיות. סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $(a,aq,aq^2,aq^3,...,aq^n,...)$.
   ג. תהא $u=(0,1,1,2,3,5,8,...)$ סדרת פיבונצ'י הסטנדרטית. הציגו את u כצרוף לינארי של הבסיס שמצאתם בסעיף ב', וקבלו נוסחא לאיבר במקום ה- n בסדרת פיבונצ'י הסטנדרטית.

אלגברה ליניארית 1 תשס"ו – פתרון תרגיל 7

1-א. נניח כי $\{v_1,v_2,v_3\}$ בת"ל, תהא $a(v_1+v_2)+b(v_2+v_3)+c(v_3+v_1)=0$ תלות ליניארית של $\{v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_1\}$. אם נפתח סוגריים ונקבץ איברים נקבל:
$(a+c)v_1+(a+b)v_2+(b+c)v_3=0$ כיוון ש-$\{v_1,v_2,v_3\}$ בת"ל מתקבלים השוויונות:
$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases}$ פיתרון השוויונות נותן $a=b=c=0$. שימו לב שבפיתרון המשוואות השתמשתם בעובדה שמציין F אינו 2.

כעת נניח כי $\{v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_1\}$ בת"ל ותהא $av_1+bv_2+cv_3=0$ תלות ליניארית של $\{v_1,v_2,v_3\}$. כפי שנראה מיד, השוויון הנ"ל שווה ל-
$\frac{a+b-c}{2}(v_1+v_2)+\frac{-a+b+c}{2}(v_2+v_3)+\frac{a-b+c}{2}(v_3+v_1)=0$ ולכן:
$a+b-c=-a+b+c=a-b+c=0$. ומכאן קל לקבל ש-$a=b=c=0$.

נסמן $U=span\{v_1,v_2,v_3\}$ ו-$W=span\{v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_1\}$. עלינו להראות ש-$U=W$. די להראות ש-$v_1,v_2,v_3\in W$ (ולכן $U\subseteq W$) וש-$(v_1+v_2),(v_2+v_3),(v_3+v_1)\in U$ (ולכן $W\subseteq U$). ברור כי $(v_1+v_2),(v_2+v_3),(v_3+v_1)\in U$. כדי להראות ש-$v_1\in W$ יש למצוא סקלרים a,b,c כך ש-$a(v_1+v_2)+b(v_2+v_3)+c(v_3+v_1)=v_1$. מתקבלות שלוש משוואות: $\begin{cases} a+c=1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases}$ שפתרונן הוא $a=1/2,b=-1/2,c=1/2$. באופן דומה מראים גם עבור v_2,v_3.

1-ב. כיוון שמציין F הוא 2, קיים שוויון: $(v_1+v_2)+(v_2+v_3)+(v_3+v_1)=0$ הנותן תלות ליניארית.

2. נראה תחילה כי הווקטורים בת"ל. אם היו הווקטורים תלויים ליניארית אזי אחד מהם היה צרוף ליניארי של קודמיו. דהיינו, v_1 היה 0 או v_2 היה שווה ל-av_1 לאיזה סקלר a. ברור שאף אחד משני הדברים לא מתקיים, ולכן הווקטורים בת"ל.
כל וקטור במרחב $span\{v_1,v_2\}$ הוא מהצורה $(a+b,a+b,a-2b)$, לכן הווקטור $v_3=(1,0,0)$ אינו שייך ל-$span\{v_1,v_2\}$. מטענה שראיתם בכיתה אנו למדים כי $\{v_1,v_2,v_3\}$ בת"ל.

3. כדי להראות שהווקטורים v_1,v_2,v_3,v_4 פורשים את $\Re^3$, די להראות כי הווקטורים: $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ נפרשים על ידי v_1,v_2,v_3,v_4. קל להראות זאת, למשל:

$$(1,0,0)=v_3-v_4$$
$$(0,1,0)=v_2-v_4$$
$$(0,0,1)=v_1-v_4$$

כדי למצוא בסיס מבין v_1,v_2,v_3,v_4, יש למצוא וקטור הנפרש על-ידי האחרים. ניתן לעשות

זאת על ידי מציאת תלות ליניארית לא-טריוויאלית. למשל: $v_1+v_2+v_3-3v_4=0$. בעזרת תלות זו רואים כי v_4 הוא צרוף ליניארי של האחרים, ולכן v_1,v_2,v_3 בסיס (קבוצה בגודל 3 הפורשת את $\Re^3$).

4-א. קל לראות כי: $W=\{(x,y,-3x-2y)\mid x,y\in\Re\}$. נציב $x=1,y=0$ ונקבל וקטור $w_1=(1,0,-3)$. נציב $x=0,y=1$ ונקבל וקטור $w_2=(0,1,-2)$. הווקטורים w_1,w_2 הם בת"ל ופורשים את W (נמקו מדוע), ולכן הם הבסיס המבוקש.

4-ב. יהא $w(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ פולינום ב-W. מכך ש-$w(0)=0$ מקבלים כי $a_0=0$. מכך ש-$w(1)=0$ מקבלים כי $a_3+a_2+a_1+a_0=0$. נסיק כי כל פולינום ב-W הוא מהצורה $a_3x^3+a_2x^2+(-a_3-a_2)x$, וכל פולינום כזה הוא ב-$W$. נציב $a_3=1,a_2=0$ ונקבל פולינום $p_1(x)=x^3-x$. נציב $a_3=0,a_2=1$ ונקבל פולינום $p_2(x)=x^2-x$. הפולינומים p_1,p_2 הם בת"ל ופורשים את W (נמקו מדוע, אותם נימוקים כמו בסעיף א' יעבדו גם כאן), ולכן הם הבסיס המבוקש.

5-א. בהינתן תלות ליניארית: $av_1+bv_2=0$ נמצא מהם a ו-b. מתקבלת מערכת משוואות: $\begin{cases}a\cos\theta+b\sin\theta=0\\ a\sin\theta-b\cos\theta=0\end{cases}$. אם $\cos\theta=0$ אזי ברור כי $\sin\theta=\pm1$ ולכן $a=b=0$.

אחרת $b=a\tan\theta$, נציב במשוואה הראשונה: $a\cos\theta+a\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=0$. מכאן מקבלים ש-$a\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta}=0$, אגף שמאל שווה ל-$a\dfrac{1}{\cos\theta}$. ולכן $a=0$ ומכאן שגם $b=0$.

5-ב. פתרון המשוואות המתאימות נותן: $\begin{matrix}a=x\cos\theta+y\sin\theta\\ b=x\sin\theta-y\cos\theta\end{matrix}$ כך ש-$(x,y)=av_1+bv_2$.

6-א. קל לראות שכל סדרת פיבונצ'י $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ נקבעת ביחידות על ידי שני האיברים הראשונים בסדרה a_1 ו-a_2. תהא $u_1=(1,0,\ldots)$ ותהא $u_2=(0,1,\ldots)$. קל להראות כי u_1,u_2 הם בת"ל ופורשים את מרחב סדרות פיבונצ'י V (נמקו).

6-ב. ראשית נמצא אילו סדרות הן גם סדרות הנדסיות וגם סדרות פיבונצ'י. תהא $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ סדרה שכזו, מצד אחד קיימים a ו-q כך ש-$a_n=aq^{n-1}$ (כיוון שזו סדרה הנדסית). מצד שני $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ כיוון שזו סדרת פיבונצ'י. על ידי הצבה מקבלים כי $aq^{n+1}=aq^n+aq^{n-1}$ לכל n. אננו מעוניינים בסדרת האפס, ולכן נניח כי a ו-q אינם 0. מתקבלת משוואה ריבועית: $q^2=q+1$ שפתרונותיה הם: $q_2=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$ $q_1=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$. מתקבלות שתי סדרות: $\begin{matrix}v_1=(1,q_1,{q_1}^2,{q_1}^3,\ldots)\\ v_2=(1,q_2,{q_2}^2,{q_2}^3,\ldots)\end{matrix}$. סדרות אלו הן גם סדרות פיבונצ'י, וקל להראות כי הן בת"ל.
מכיוון שמימד V הוא 2, סדרות אלו הן בסיס ל-V.

6-ג. יש למצוא a ו- b כך ש- $av_1 + bv_2 = (0,1,1,2,3,5,8,...)$. מספיק למצוא a ו- b הפותרים את מערכת המשוואות: $\begin{cases} a+b=0 \\ aq_1 + bq_2 = 1 \end{cases}$ (מדוע? רמז – סעיף א'). הפיתרון המתאים הוא: $a=1, b=-1$. לכן $v_1 - v_2 = (0,1,1,2,3,5,8,...)$ והאיבר ה- n בסדרת פיבונצ'י $0,1,1,2,3,5,8,...$ נתון על ידי הנוסחא: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ (כאשר האיבר הראשון בסדרה הוא 0).

אלגברה לינארית – תרגיל 8

יש להגיש את תרגיל 7 לשבוע הבא ובנוסף הגישו את השאלות הבאות:

1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ו $A=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\subseteq V$ תת-קבוצה סופית של וקטורים מ- V. הוכיחו\הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ בת"ל אז לכל $\alpha\notin A$ גם $\alpha_1+\alpha,\dots,\alpha_n+\alpha$ בת"ל.

ב. אם $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ בת"ל אז לכל $\alpha\notin span(A)$ גם $\alpha_1+\alpha,\dots,\alpha_n+\alpha$ בת"ל.

2. יהי V המרחב וקטורי של כל הפולינומים ממעלה לכל היותר 3 מעל שדה $\mathbb{F}$.

הוכיחו\הפריכו:

א. עבור $\mathbb{F}$ ששווה $\mathbb{Z}_5$ הוקטורים $x-1, x+1, x^3+x^2+x, x^2+x+1$ פורשים את V.

ב. עבור $\mathbb{F}$ כלשהו הוקטורים $x-1, x+1, x^3+x^2+x, x^2+x+1$ פורשים את V.

3. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ עם בסיס $A=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\subseteq V$.

הוכיחו\הפריכו: לכל $U\subseteq V$ תת-מ"ו קיימת תת-קבוצה של A שהיא בסיס ל U.

4. יהיו $c_1,\dots,c_k\in\mathbb{R}$ קבועים ויהי V אוסף כל הסדרות הממשיות $(a_i)_{i=1,\dots}=(a_1,a_2,\dots)$ שמקיימות לכל i, $a_{i+k}=c_1a_i+c_2a_{i+1}+\dots c_ka_{i+k-1}$. הוכיחו ש V, עם פעולות חיבור וכפל בסקלר קורדינטה-קורדינטה, הוא מ"ו וחשבו את מימדו.

אלגברה לינארית – תרגיל 8

יש להגיש את תרגיל 7 לשבוע הבא ובנוסף הגישו את השאלות הבאות:

1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ו $A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subseteq V$ תת-קבוצה סופית של וקטורים מ- V. הוכיחו\הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ בת"ל אז לכל $\alpha\notin A$ גם $\alpha_1+\alpha,\ldots,\alpha_n+\alpha$ בת"ל.

<u>פתרון:</u> לא נכון. דוג' נגדית: $n=1, A=\{\alpha_1\},\ \alpha_1=1\in V=\mathbb{R}$ מקיים הנ"ל אבל $\alpha=-1\notin A$ וכמו-כן $\alpha_1+\alpha=0$ וזו קבוצה ת"ל.

ב. אם $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ בת"ל אז לכל $\alpha\notin span(A)$ גם $\alpha_1+\alpha,\ldots,\alpha_n+\alpha$ בת"ל.

<u>פתרון:</u> נכון. הוכחה: יהא צל"נ ששווה 0 קרי

$$0=\sum_i a_i(\alpha_i+\alpha)=\sum_i a_i\alpha_i+\sum_i\alpha=\sum_i a_i\alpha_i+(1+..+1)\alpha=$$

אם סכום האחדים שונה מ 0 אז ניתן להעביר אגף ולחלק בסקלר זה ונקבל ש $\alpha\in span(A)$ וזה בסתירה להנחה ולכן סכום האחדים שווה 0 ואז מאי תלות A כל הסקלרים שווים 0 ומש"ל.

2. יהי V המרחב וקטורי של כל הפולינומים ממעלה לכל היותר 3 מעל שדה $\mathbb{F}$.

הוכיחו\הפריכו:

א. עבור $\mathbb{F}$ ששווה $\mathbb{Z}_5$ הוקטורים $x-1,x+1,x^3+x^2+x,x^2+x+1$ פורשים את V.

<u>פתרון:</u> נכון. דרך א': מספיק להראות שהם פורשים את הפולינומים הסטנדרטיים: $1=\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{2}(x-1)$ וגם $x=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2}(x-1)$ כיוון שפרשנו את $1,x$ אז גם $x^2=(x^2+x+1)-x-1$ נפרש ולכן גם $x^3=(x^3+x^2+x)-x^2-x$ נפרש וסיימנו.

דרך ב': מספיק להראות שהם בת"ל וכיוון שמימד המרחב הוא 4 נקבל שהם פורשים. לכן מספיק להראות שבסדר הנ"ל שום וקטור אינו צל"נ של קודמיו (ראינו שווקטורים ת"ל אמ"מ איזשהו וקטור הוא צל"נ של קודמיו). זה ברור במקרה הזה משקולי דרגת הפולינומים ונעיר שלגבי השני הוא אינו צל"נ של קודמו (השמאלי

ביותר) כיוון שאם הוא היה כפולה של קודמו אז הוא כפולה ב 1 שהרי המקדם של X בשניהם הוא 1 אך אז המקדם החפשי שונה שהרי $-1 \neq 1$ ב $\mathbb{Z}_5$. מש"ל.

ב. עבור $\mathbb{F}$ כלשהו הוקטורים $x-1, x+1, x^3+x^2+x, x^2+x+1$ פורשים את V.

<u>פתרון:</u> לא נכון. ב $\mathbb{Z}_2$ שני הוקטורים השמאליים שווים ולכן זו קבוצה ת"ל ולכן גם לא פורשת (גודלה 4 כמו המימד ולכן בת"ל אמ"מ פורשת).

3. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ עם בסיס $A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subseteq V$.

הוכיחו\הפריכו: לכל $U\subseteq V$ תת-מ"ו קיימת תת-קבוצה של A שהיא בסיס ל U.

<u>פתרון:</u> לא נכון. דוג' נגדית: $A=\{(1,0),(0,1)\}, V=\mathbb{R}^2$ ו $U=\{(x,x):x\in\mathbb{R}\}$. אין תת-קבוצה כזו כיוון שאברי A כלל לא שייכים ל U.

4. יהיו $c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{R}$ קבועים ויהי V אוסף כל הסדרות הממשיות $(a_i)_{i=1,\ldots}=(a_1,a_2,\ldots)$ שמקיימות לכל i, $a_{i+k}=c_1a_i+c_2a_{i+1}+\ldots c_ka_{i+k-1}$. הוכיחו ש V, עם פעולות חיבור וכפל בסקלר קורדינטה-קורדינטה, הוא מ"ו וחשבו את מימדו.

<u>פתרון:</u> לשם הנוחות נקרא לסדרות שמקיימות את התנאי הנ"ל "טובות". ראשית כתת קבוצה של מרחב כל הסדרות הממשיות אם אותם פעולות חיבור וכפל בסקלר מספיק לבדוק שזהו תמ"ו ולזה מספיק לבדוק שזו קבוצה לא ריקה וסגורה לחיבור וכפל בסקלר. סדרת האפסים "טובה" ולכן זו לא קבוצה ריקה. יהיו $(a_i),(b_i)$ שתי סדרות "טובות" ו x סקלר כלשהו. נסמן

$$\begin{aligned}(e_i)&=(a_i)+(b_i)=(a_i+b_i)\\(d_i)&=x(a_i)=(xa_i)\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}e_{i+k}&=a_{i+k}+b_{i+k}=\\&=(c_1a_i+c_2a_{i+1}+\ldots c_ka_{i+k-1})+(c_1b_i+c_2b_{i+1}+\ldots c_kb_{i+k-1})=\\&=c_1e_i+c_2e_{i+1}+\ldots c_ke_{i+k-1}\end{aligned}$$

וגם $d_{i+k}=xa_{i+k}=x(c_1a_i+c_2a_{i+1}+\ldots c_ka_{i+k-1})=c_1d_i+c_2d_{i+1}+\ldots c_kd_{i+k-1}$

מכאן שגם $(a_i)+(b_i), x(a_i)$ סדרות "טובות" כנדרש.

נמצא בסיס בגודל k ולכן המימד הוא k. מהגדרת סדרה "טובה" רואים שבהנתן k איבריה הראשונים – שאר האיברים נקבעים וכמו-כן k האיברים הראשונים יכולים

להיות שרירותיים. לכן מספיק למצוא קבוצה שה-k-יות הראשונות בה הן בסיס למרחב כל ה-k-יות הממשיות. ניקח k אברי בסיס ל $\mathbb{R}^k$ נשלים אותם ל-k סדרות טובות. כיוון שע"י צל"נ של סדרות אלו נקבל את כל הסדרות הטובות זו קבוצה פורשת. ואם צל"נ שלהן שווה 0 אז וודאי אותו צל"נ של ה-k-יות הראשונות בהן שווה ל-k-ית ה-0 ולכן מאי-תלות ה-k-יות הראשונות זהו צל"נ טריוויאלי.

<u>**שימו לב:**</u> עכשיו שאתם מכירים את מושג ההעתקה הליניארית ניתן לראות את אי-תלות סדרות אלו גם למשל ע"י שליחת סדרה טובה ל $\mathbb{R}^k$ ע"י שכחה של כל האיברים פרט ל-k הראשונים. זו העתקה ליניארית (זה קל-בדקו זאת). ובחרנו k סדרות שמועתקות לקב' בת"ל ולכן גם הן בת"ל. עוד אפשרות היא להגדיר את ההעתקה ההפוכה השולחת k-יה לסדרה ה"טובה" היחידה שמשלימה אותה. זו גם ההעתקה לינארית(בידקו..) וגם חח"ע(בידקו..) ולכן מימד התמונה שווה למימד $\mathbb{R}^k$ כלומר k.

תרגיל מספר 9 - אלגברה לינ יארית.

1. בדקו בכל אחד מהמקרים הבאים האם T ליניארית:
   1) $T:R^3\to R^2$ מוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(2x-5y+3z,-x+7y+z)$.
   2) $T:R^2\to R^3$ מוגדרת ע"י $T(x,y)=(3x-5y,0,x+y+1)$.
   3) תהי $A=\{f:R\to R\}$, ותהי $V=A\times R$. $T:V\times R\to V\times R$ מוגדרת ע"י $T(f,a)=f(a)$.
   4) $T:R^\infty\to R^\infty$ הפונקציה המעתיקה כל סדרה לסדרת הסכומים החלקיים שלה, כלומר $T(a_1,a_2,\ldots)=(s_1,s_2,\ldots)$ כאשר $s_k=\sum_{i=1}^{k}a_i$ לכל $k\geq 1$.

2.
   1) תהי $T:R^3\to R^3$ העתקה ליניארית המקיימת את התנאים $T(1,0,1)=(-1,3,4)$, $T(1,-1,1)=(0,1,0)$ ו- $T(1,2,-1)=(3,1,4)$. חשבו את $T(1,0,0)$.
   2) תהי $T:R^3\to R^3$ העתקה ליניארית המקיימת את התנאים $T(1,1,0)=(1,2,-1)$, $T(1,0,-1)=(0,1,1)$ ו - $T(0,-1,1)=(3,1,4)$. מצאו וקטור $v\in R^3$ המקיים $T(v)=(1,0,0)$.

3. יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל שדה F. **הגרף** של פונקציה כלשהי $f:V\to W$ מוגדר ע"י $gr(f)=\{(v,f(v):v\in V)\}\subseteq V\times W$. הוכיחו כי f העתקה ליניארית אם ורק אם $gr(f)$ תת מרחב של $V\times W$.

4. האם קיימת העתקה ליניארית $T:Q^4\to Q[X]$ המקיימת את התנאים $T(1,2,0,-1)=2$, $T(-1,1,1,1)=x$ ו- $T(-1,4,2,1)=x+1$?

5. יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל Z_{17},Z_{19} בהתאמה. תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית. הוכיחו כי $T(v)=0$ לכל $v\in V$.

6. מצאו שדה F, ומרחבים וקטוריים ממימד סופי V,W מעל F, והעתקה $T:V\to W$ עבורם: לכל $v\in V$ ולכל $a\in F$ מתקיים $T(av)=aT(v)$, אך T איננה העתקה ליניארית.

בהצלחה.

תרגיל מספר 9 - אלגברה לינ יארית. (פיתרונות)

1. בדקו בכל אחד מהמקרים הבאים האם T ליניארית:

1) $T:R^3\to R^2$ מוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(2x-5y+3z,-x+7y+z)$.

תשובה: כן. הוכחה: יהיו $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in R^3$ ו- $t,s\in R$.

$$T\big(t(x_1,y_1,z_1)+s(x_2,y_2,z_2)\big)=$$
$$\big(2(tx_1+sx_2)-5(ty_1+sy_2)+3(tz_1+sz_2),-(x_1+x_2)+7(ty_1+sy_2)+(tz_1+sz_2)\big)=$$
$$t(2x_1-5y_1+3z_1,-x_1+7y_1+z_1)+s(2x_2-5y_2+3z_2,-x_2+7y_2+z_2)=tT(x_1,y_1,z_1)+sT(x_2,y_2,z_2)$$

2) $T:R^2\to R^3$ מוגדרת ע"י $T(x,y)=(3x-5y,0,x+y+1)$.

תשובה: לא. הוכחה: אילו T הייתה ליניארית, היה מתקיים $T(0,0)=(0,0,0)$, אבל $T(0,0)=(0,0,1)$.

3) תהי $A=\{f:R\to R\}$, ותהי $V=A\times R$. $T:V\to R$ מוגדרת ע"י $T(f,a)=f(a)$.

תשובה: לא. הוכחה: עבור $f(x)=x^2$, ברור שלא מתקיים

$T(f,a+b)=(a+b)^2=a^2+b^2=T(f,a)+T(f,b)$ לכל $a,b\in R$.

4) $T:R^\infty\to R^\infty$ הפונקציה המעתיקה כל סדרה לסדרת הסכומים החלקיים שלה, כלומר

$T(a_1,a_2,\dots)=(s_1,s_2,\dots)$ כאשר $s_k=\sum_{i=1}^{k}a_i$ לכל $k\ge 1$.

תשובה: כן. הוכחה: יהיו $(a_1,a_2,\dots),(b_1,b_2,\dots)\in R^\infty$, $t,s\in R$.

$$T\big[t(a_1,a_2,\dots)+s(b_1,b_2,\dots)\big]=T(ta_1+sb_1,ta_2+sb_2,\dots)=$$
$$(ta_1+sb_1,ta_1+ta_2+sb_1+sb_2,\dots)=t(a_1,a_1+a_2,\dots)+s(b_1,b_1+b_2,\dots)=$$
$$tT(a_1,a_2,\dots)+sT(b_1,b_2,\dots)$$

2.

1) תהי $T:R^3\to R^3$ העתקה ליניארית המקיימת את התנאים $T(1,0,1)=(-1,3,4)$, $T(1,-1,1)=(0,1,0)$ ו- $T(1,2,-1)=(3,1,4)$. חשבו את $T(1,0,0)$.

תשובה: נכתוב $(1,0,0)=a(1,0,1)+b(1,-1,1)+c(1,2,-1)$ ונקבל כי $\begin{cases}a+b+c=1\\ 2c-b=0\\ a+b-c=0\end{cases}$ ולכן

$a=-\frac{1}{2},b=1,c=\frac{1}{2}$. לכן $T(1,0,0)=-\frac{1}{2}T(1,0,1)+T(1,-1,1)+\frac{1}{2}T(1,2,-1)$ וזה ניתן לחישוב באופן ישיר מהנתון.

2) תהי $T:R^3\to R^3$ העתקה ליניארית המקיימת את התנאים $T(1,1,0)=(1,2,-1)$,
$T(1,0,-1)=(0,1,1)$ ו - $T(0,-1,1)=(3,1,4)$. מצאו וקטור $v\in R^3$ המקיים
$T(v)=(1,0,0)$.

תשובה: נכתוב $(1,0,0)=a(1,2,-1)+b(3,1,4)+c(0,1,1)$, ונקבל כי $\begin{cases} a+3b=1 \\ 2a+b+c=0 \\ -a+4b+c=0 \end{cases}$.

לכן, $a=b=\frac{1}{4}, c=-\frac{3}{4}$. לכן

$$T(v)=(1,0,0)=\frac{1}{4}(1,2,-1)+\frac{1}{4}(3,1,4)-\frac{3}{4}(0,1,1)=$$
$$T\left[\frac{1}{4}(1,1,0)+\frac{1}{4}(0,-1,1)-\frac{3}{4}(1,0,-1)\right]$$

ולכן $v=\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$.

3. יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל שדה F. **הגרף** של פונקציה כלשהי $f:V\to W$ מוגדר ע"י $gr(f)=\{(v,f(v):v\in V)\}\subseteq V\times W$. הוכיחו כי f העתקה ליניארית אם ורק אם $gr(f)$ תת מרחב של $V\times W$.

הוכחה: נניח כי f ליניארית. יהיו $(v,f(v)),(w,f(w))\in gr(f)$, ו - $t,s\in R$. מהיות f ליניארית,
$t(v,f(v))+s(w,f(w))=(tv+sw,tf(v)+sf(w))=(tv+sw,f(tv+sw))\in gr(f)$.
כמו כן ברור כי $gr(f)$ איננה ריקה, ולכן היא תת מרחב של $V\times W$.
עתה נניח כי $gr(f)$ תת מרחב. מהיותו סגור לצירופים ליניאריים,
$t(v,f(v))+s(w,f(w))=(tv+sw,tf(v)+sf(w))\in gr(f)$, ולכן
$tf(v)+sf(w)=f(tv+sw)$, ולכן f ליניארית.

4. האם קיימת העתקה ליניארית $T:Q^4\to Q[X]$ המקיימת את התנאים
$T(1,2,0,-1)=2$, $T(-1,1,1,1)=x$ ו- $T(-1,4,2,1)=x+1$?
תשובה: לא. בשלילה, נניח שקיימת כזאת T. נשים לב כי
$(-1,4,2,1)==2(-1,1,1,1)+(1,2,0,-1)$ ולכן מהיות T ליניארית,
$x+1=T(-1,4,2,1)=2T(-1,1,1,1)+T(1,2,0,-1)=2x+2$. סתירה.

5. יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל Z_{17},Z_{19} בהתאמה. תהי $T:V\to W$ פונקציה המקיימת $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$. הוכיחו כי $T(v)=0$ לכל $v\in V$.

הוכחה: יהי $v\in V$. מתקיים לכל n טבעי, $T(n\times v)=n\times T(v)$. ולכן $0=T(0)=T(17\times v)=17\times T(v)$. בנוסף מהיות W מרחב וקטורי מעל Z_{19} , גם $0=T(19\times v)=19\times T(v)$. לכן $T(2\times v)=T(19\times v)=T(17\times v)+T(2\times v)=0$ ו- $0=T(17\times v)=8\times T(2\times v)+T(v)$ ולכן $T(v)=0$.

6. מצאו שדה F , ומרחבים וקטוריים ממימד סופי V,W מעל F , והעתקה $T:V\to W$ עבורם: לכל $v\in V$ ולכל $a\in F$ מתקיים $T(av)=aT(v)$, אך T איננה העתקה ליניארית.

דוגמא: $T:R^2\to R$ המוגדרת ע"י $T(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$ מקיימת $T(\alpha x,\alpha y)=\sqrt[3]{\alpha^3x^2y}=\alpha\sqrt[3]{x^2y}=\alpha T(x,y)$, אבל $1=T(1,1)\neq T(1,0)+T(0,1)=0$.

בהצלחה.

אלגברה לינארית 1
תרגיל 10

1. יהי F שדה, ויהי $V=F$ מרחב וקטורי מעל F. תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית. הוכח שקיים a ב – F כך ש $T(x)=ax$ לכל x ב- F.

2. יהיו V_n, V_{n-1} מרחבי הפולינומים מעל הממשים, ותהא $D:V_n\to V_{n-1}$ העתקת הגזירה, כלומר
$$D\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) := \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$
   a. האם היא העתקה ליניארית או לא. הוכח או הפרך.
   b. מהו Ker(D), ומה מימדו?
   c. מהו Im(D). ומה מימדו ?
   d. מהי המטריצה המייצגת את D לפי הבסיסים
   $\{1, x+1, x^2+x+1, ..., x^n+x^{n-1}+....+x^2+x+1\}$ ו-
   $\{1, x+1, x^2+x+1, ..., x^{n-1}+....+x^2+x+1\}$?

3. יהיו $F=\boldsymbol{R}$, $W=\boldsymbol{R}^3$, $V=\boldsymbol{R}^2$:
$$E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=((1,2),(1,3))$$
$$F=(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$$

נגדיר $T:V\to W$ ע"י: $T(x,y):=(x-y, 2x+y, 4x-5y)\quad (\forall x,y\in \boldsymbol{R})$

ברור ש-T היא ט"ל. מהי המטריצה המייצגת את T לפי הבסיסים E ו- F?

4. תהי $T:V\to V$ עבורה מתקיים $KerT=Ker(T)^2$ הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
   א. $T=T^2$.
   ב. $\operatorname{Im}T=\operatorname{Im}T^2$
   ג. $KerT\cap \operatorname{Im}T=\{0\}$

אלגברה לינארית 1
תרגיל 10

1. יהי F שדה, ויהי $V=F$ מרחב וקטורי מעל F. תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית. הוכח שקיים a ב $-F$ כך ש $T(x)=ax$ לכל x ב- F.
2. פתרון: מכיוון שלכל $x\in V$, $x=x\cdot 1$ לכן נקבל $T(x)=T(x\cdot 1)=x\cdot T(1)$.
3. תהי $a=T(1)$ ולכן $T(x)=ax$ לכל x ב- F.

4. יהיו V_n, V_{n-1} מרחבי הפולינומים מעל הממשים, ותהא $D:V_n\to V_{n-1}$ העתקת הגזירה, כלומר

$$D\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) := \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \cdot$$

a. האם היא העתקה ליניארית או לא. הוכח או הפרך.
b. מהו Ker(D), ומה מימדו?
c. מהו Im(D). ומה מימדו ?
d. מהי המטריצה המייצגת את D לפי הבסיסים
$\{1, x+1, x^2+x+1, ..., x^n+x^{n-1}+....+x^2+x+1\}$ ו-
$\{1, x+1, x^2+x+1, ..., x^{n-1}+....+x^2+x+1\}$?

פתרון: א. כן בדיקה ישירה.
ב. $KerD=\{v\in V_n; D(v)=0\}=\{\lambda\in F\}$ כלומר כל הסקלרים. ברור שהמימד 1.
ג. $\operatorname{Im} D=\{v\in V_n; \exists v'\in V_n, D(v')=v\}=\{v\in V_{n-1}\}$. והמימד הוא $n-1$.
ד.

$$D(1)=0=(0,0,....,0)$$
$$D(x+1)=1=(1,0,0,...,0)$$
$$D(x^2+x+1)=2x+1=(-1,2,0,0,...,0)$$
$$....$$
$$D(x^n+x^{n-1}+,...,x^2+x+1)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+,...,+2x+1)=$$
$$(-1,.....,-1,-1,n,0)$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 2 & \dots & \dots & -1 \\ \vdots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

5. יהיו $F=\boldsymbol{R}$, $W=\boldsymbol{R}^3$, $V=\boldsymbol{R}^2$: $\quad E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=((1,2),(1,3))$

$$F=(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$$

נגדיר $T:V\to W$ ע"י: $T(x,y):=(x-y, 2x+y, 4x-5y)\ \ (\forall x,y\in\boldsymbol{R})$

ברור ש-T היא ט"ל. מהי המטריצה המייצגת את T לפי הבסיסים E ו- F?

<u>פתרון:</u>
העמודה הראשונה של $[T]_F^E$ היא:

$$[T(\vec{e}_1)]_F = [T(1,2)]_F = [(-1,4,-6)]_F = [(-1)\cdot \vec{f}_1 + 4\cdot \vec{f}_2 - 6\cdot \vec{f}_3]_F = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{3\times 1}$$

באופן כללי, צריך לפתור פה ממ"ל , אבל עבור הבסיס הסטנדרטי, זה קל מאוד.
העמודה השניה של $[T]_F^E$ היא:

$$[T(\vec{e}_2)]_F = [T(1,3)]_F = [(-2,5,-11)]_F = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{3\times 1}$$

ולכן, לסיכום:

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \\ -6 & -11 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{3\times 2}$$

6. תהי $T: V \to V$ עבורה מתקיים $KerT = Ker(T)^2$ הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. $T = T^2$.
ב. $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^2$
ג. $KerT \bigcap \operatorname{Im} T = \{0\}$

פתרון: א. לא נכון.
דוגמא נגדית $T: R \to R$ כאשר $T(v) = -v$. ברור כי $KerT = \{0\}$.
$T^2 : R \to R$ כאשר $T^2(v) = v$ כלומר פונקצית הזהות. ומתקיים $KerT = KerT^2$ אך ברור ש -
$T \neq T^2$.

ב.ברור כי $\operatorname{Im} T^2 \subseteq \operatorname{Im} T$. לפי משפט $Dim(KerT^2) + Dim(\operatorname{Im} T^2) = DimV$
מכיוון ש- $KerT^2 = KerT$ נקבל $Dim(\operatorname{Im} T^2) = Dim(\operatorname{Im} T)$.
$\operatorname{Im} T^2$ הוא תת-מרחב של $\operatorname{Im} T$ ולישנהם יש אותו מימד לכן $\operatorname{Im} T^2 = \operatorname{Im} T$.

ג.נכון.
יהי $v \in KerT \bigcap \operatorname{Im} T$ אזי $T(v) = 0$ כי $v \in KerT$. מאידך מכיוון ש- $v \in \operatorname{Im} T$ אזי קיים $u \in V$ כך
ש- $T(u) = v$. ולכן $u \in KerT^2$. והרי $KerT = KerT^2$ לכן $u \in KerT$ לכן $T(u) = 0$ ונקבל $v = 0$.

אלגברה לינארית – תרגיל 11

1. נסמן ב- V_n את מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל-n. נגדיר שני בסיסים ל- V_n:

$$B_n=\{1,x,x^2,x^3,\ldots,x^n\}$$
$$C_n=\{1,1+x,1+x^2,1+x^3,\ldots,1+x^n\}$$

תהי $D:V_4\rightarrow V_3$ העתקת הגזירה כפי שהוגדרה בתרגיל10.

א. מצאו את מטריצת מעבר הבסיס מ-C_4 ל- B_4. נסמן מטריצה זו ב-P.

ב. מצאו את מטריצת מעבר הבסיס מ-B_3 ל- C_3. נסמן מטריצה זו ב-Q.

ג. מצאו את ההצגה של העתקת הגזירה יחסית לבסיסים B_4, B_3 . נסמן מטריצה זו ב- D_B .

ד. מצאו את ההצגה של העתקת הגזירה יחסית לבסיסים C_4, C_3 . נסמן מטריצה זו ב- D_C .

ה. הוכיחו (ע"י כפל מטריצות) כי מתקיים: $QD_BP=D_C$.

2. נתונה ההעתקה הלינארית הבאה: $T:R^2\rightarrow R^2$ המוגדרת $T(x,y,z)=(-3x+15y,-2x+8y)$

א. מצאו את ההצגה של T יחסית לבסיס הסטנדרטי של R^2 . נסמן מטריצה זו ב- T_1 .

ב. מצאו את ההצגה של T יחסית לבסיס $B=\{v=(3,1),u=(5,2)\}$. נסמן מטריצה זו ב- T_2 .
(שימו לב שהמטריצה שקבלתם היא מטריצה אלכסונית!)

ג. מצאו את מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי ל- B. נסמן מטריצה זו ב-P.

ג. מצאו את מטריצת המעבר מ- B לבסיס הסטנדרטי נסמן מטריצה זו ב-Q.

ד. וודאו כי PQ=I.

ה. הוכיחו (ע"י כפל מטריצות) כי מתקיים: $T_1=QT_2P$.

ו. השתמשו בסעיפים ג'- ד' כדי לחשב את $(T_1)^{10}$

3. מטריצה ריבועית A ב-$M_n(F)$ תיקרא **מטריצה סקלרית** אם A=cI, כאשר c איבר בשדה F, ו-I מטריצת היחידה מאותו גודל. כלומר, A מהצורה:

$$A=\begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c \end{pmatrix}$$

מטריצה ריבועית A ב-$M_n(F)$ תיקרא **מטריצה מרכזית**, אם לכל B ב-$M_n(F)$ מתקיים BA=AB.

א. נניח V מרחב וקטורי ממימד n מעל F, ו- $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של V.
נתונה $T:V\rightarrow V$ המוגדרת ע"י $T(v)=cv$ (c סקלר). הוכיחו כי ההצגה של T ביחס לבסיס B היא מטריצה סקלרית.

ב. תהי A ב-$M_n(F)$. הוכיחו כי A מרכזית אם"ם A סקלרית.

ג. תהי $T:V\rightarrow V$ העתקה לינארית. הסיקו ש-T מתחלפת עם כל טרל"נ $S:V\rightarrow V$ (כלומר TS=ST) אם"ם T מהצורה $T(v)=cv$ (c סקלר).

אלגברה לינארית – פתרון תרגיל 11

1. נסמן ב- V_n את מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל-n. נגדיר שני בסיסים ל- V_n:

$$B_n=\{1,x,x^2,x^3,\ldots,x^n\}$$
$$C_n=\{1,1+x,1+x^2,1+x^3,\ldots,1+x^n\}$$

תהי $D:V_4\rightarrow V_3$ העתקת הגזירה כפי שהוגדרה בתרגיל10.

א. מצאו את מטריצת מעבר הבסיס מ-C_4 ל- B_4. נסמן מטריצה זו ב-P.

$$P=[Id]_{B_4}^{C_4}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

כי למשל $Id(1+x)=1+x=1\cdot1+1\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3+0\cdot x^3$, ולכן בעמודה השנייה במטריצה מופיעים המקדמים 1,1,0,0,0.

ב. מצאו את מטריצת מעבר הבסיס מ-B_3 ל- C_3. נסמן מטריצה זו ב-Q.

$$Q=[Id]_{C_3}^{B_3}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

כי למשל $Id(x)=x=-1\cdot1+1\cdot(1+x)+0\cdot(1+x^2)+0\cdot(1+x^3)$, ולכן בעמודה השנייה במטריצה מופיעים המקדמים $-1,1,0,0$.

ג. מצאו את ההצגה של העתקת הגזירה יחסית לבסיסים B_4, B_3. נסמן מטריצה זו ב- D_B.

$$D_B=[D]_{B_3}^{B_4}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

כי למשל $D(x)=1=1\cdot1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$, ולכן בעמודה השנייה במטריצה מופיעים המקדמים 1,0,0,0.

ד. מצאו את ההצגה של העתקת הגזירה יחסית לבסיסים C_4, C_3. נסמן מטריצה זו ב- D_C.

$$D_C=[D]_{C_3}^{C_4}=\begin{pmatrix}0&1&-2&-3&-4\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

כי למשל $D(1+x)=1=1\cdot1+0\cdot(1+x)+0\cdot(1+x^2)+0\cdot(1+x^3)$, ולכן בעמודה השנייה במטריצה מופיעים המקדמים 1,0,0,0.

ה. הוכיחו (ע"י כפל מטריצות) כי מתקיים: $QD_BP=D_C$: חישוב ישיר.

2. נתונה ההעתקה הלינארית הבאה: $T:R^2 \rightarrow R^2$ המוגדרת $T(x,y)=(-3x+15y,-2x+8y)$

א. מצאו את ההצגה של T יחסית לבסיס הסטנדרטי של R^2 . נסמן מטריצה זו ב- T_1 .

$$T_1=[T]_E^E=\begin{pmatrix}-3 & 15\\ -2 & 8\end{pmatrix}$$

כי למשל $T((1,0))=(-3,-2)$ ולכן בעמודה הראשונה מופיעים המקדמים $-3,-2$.

ב. מצאו את ההצגה של T יחסית לבסיס $B=\{v=(3,1),u=(5,2)\}$. נסמן מטריצה זו ב- T_2 .

$$T_2=[T]_A^A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$ (מטריצה אלכסונית!)

כי למשל $T((3,1))=(6,2)=2\cdot(3,1)+0\cdot(5,2)$ ולכן בעמודה הראשונה מופיעים המקדמים 2,0.

ג. מצאו את מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי ל- B. נסמן מטריצה זו ב-P.

$$P=[Id]_A^E=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

כי למשל $Id((1,0))=(1,0)=2\cdot(3,1)-1\cdot(5,2)$ ולכן בעמודה הראשונה מופיעים המקדמים $2,-1$.

ג. מצאו את מטריצת המעבר מ- B לבסיס הסטנדרטי נסמן מטריצה זו ב-Q.

$$Q=[Id]_E^A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

כי למשל $Id((3,1))=(3,1)=3\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)$ ולכן בעמודה הראשונה מופיעים המקדמים3,1.

ד. וודאו כי PQ=I : חישוב ישיר

ה. הוכיחו (ע"י כפל מטריצות) כי מתקיים: $T_1=QT_2P$: חישוב ישיר

ו. השתמשו בסעיפים ג'- ד' כדי לחשב את $(T_1)^{10}$:

$$(T_1)^{10}=(QT_2P)^{10}=\underbrace{(QT_2P)(QT_2P)...(QT_2P)}_{10}=\underbrace{QT_2(PQ)T_2(PQ)...(PQ)T_2P}_{10}=Q\underbrace{T_2T_2...T_2}_{10}P=Q(T_2)^{10}P=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^{10}\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{10} & 0\\ 0 & 3^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}=$$

3. מטריצה ריבועית A ב-$M_n(F)$ תיקרא **מטריצה סקלרית** אם $A=cI$, כאשר c איבר בשדה F, ו-I מטריצת היחידה מאותו גודל. כלומר, A מהצורה:

$$A=\begin{pmatrix}c & 0 & \cdots & 0\\ 0 & c & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & c\end{pmatrix}$$

מטריצה ריבועית A ב-$M_n(F)$ תיקרא **מטריצה מרכזית**, אם לכל B ב-$M_n(F)$ מתקיים BA=AB.

א. נניח V מרחב וקטורי ממימד n מעל F, ו- $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V.
נתונה $T:V\to V$ המוגדרת ע"י $T(v)=cv$ (c סקלר). הוכיחו כי ההצגה של T ביחס לבסיס B היא מטריצה סקלרית.
$T(v)=cv$ לכל וקטור $v\in V$. בפרט, לאיברי הבסיס מתקיים $T(v_i)=cv_i$. לכן הייצוג של T לפי הבסיס B הינו $[T]_B^B=\begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c \end{pmatrix}$

ב. תהי A ב-$M_n(F)$. הוכיחו כי A מרכזית אם"ם A סקלרית.
1. נניח $A=cI$. אזי לכל מטריצה B מתקיים $AB=(cI)B=c(IB)=cB=B(cI)=BA$. לכן A מרכזית.
2. נניח A מרכזית. נכפיל את A משני הצדדים במטריצה האלמנטרית E_{ii} : מתקיים

$$AE_{ii}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{2i} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{ni} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & \dots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \dots & & & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & & & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & & \dots & & & a_{in} \\ 0 & 0 & & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{ni} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}=E_{ii}A$$

ולכן לכל $j\neq i$, $a_{ji}=a_{ij}=0$.
ע"י שיקול דומה עבור המטריצה האלמנטרית E_{i1} , נסיק $a_{ii}=a_{11}$ לכל i.

ג. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. הסיקו ש-T מתחלפת עם כל טרל"נ $S:V\to V$ (כלומר TS=ST) אם"ם T מהצורה $T(v)=cv$ (c סקלר).
נקבע בסיס E ל- V. נתבונן במטריצה המייצגת את T לפי הבסיס E, שנסמנה A.
T העתקה סקלרית אם"ם
A מטריצה סקלרית אם"ם
BA=AB לכל מטריצה B אם"ם
ST =TS לכל העתקה S .
(כי כל העתקה $S:V\to V$ יש ייצוג לפי הבסיס E ע"י איזה מטריצה B, ולהיפך: כל מטריצה B ניתן לראות כייצוג של איזה העתקה ע"פ הבסיס E)

תרגיל 12 - אלגברה לינארית 1

1. תהי $T:V\to V$ ט"ל על מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה, כך שביחס לכל בסיס $B=(v_1,...,v_n)$ מתקבלת אותה מטריצה מתאימה, כלומר - לכל בסיס B מתקיים $[T]_B=A$ עבור $A\in M_n(F)$ קבועה. הוכיחו כי $T=\lambda I$ כאשר λ סקלר ו- I טרנספורמצית הזהות.
(ניתן להעזר בהוכחת תרגיל 11 שאלה 3 או להוכיח באופן ישיר)

2. יהי E_3 הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ ו- $B=((2,-1,-1),(0,-1,0),(0,2,3))$. מצאו את הוקטורים שהקואורדינטות שלהם ביחס לשני הבסיסים שוות.

3. א. תהי $A\in M_{n\times n}(F)$ מטריצה ריבועית $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$. נגדיר את העקבה (trace) של A להיות סכום איברי האלכסון הראשי של A ; $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.
הוכיחו: $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$, $tr(AB)=tr(BA)$ לכל שתי מטריצות ריבועיות מסדר n.
ב. יהי V מ"ו ממימד סופי מעל שדה F, $charF=0$.
הוכיחו כי לא קיימים $T,S\in End_F(V)$ המקיימים $TS-ST=I$. (I כרגיל טרנספורמצית הזהות)
ג. תנו דוגמא לט"ל T,S על מ"ו ממימד סופי מעל שדה ממציין 2 המקיימות $TS-ST=I$.
ד. יהי $V=F[x]$ מרחב כל הפולינומים מעל שדה F, D טרנספורמציית הגזירה – כפי שהוגדרה בתרגילים קודמים, ו- T הטרנספורמציה הפועלת ע"י $T(p(x))=x\cdot p(x)$ עבור $p(x)\in F[x]$ (ודאו כי זו אכן ט"ל על המרחב). חשבו את $DT-TD$.

4. א. חשבו את $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n$ עבור $n\in\mathbb{N}$ (מה קורה עבור $n\in\mathbb{Z}$?)
ב.i . עבור $\theta,\varphi\in\mathbb{R}$ נסמן $M_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$, ובאופן דומה M_φ. חשבו את $M_\theta\cdot M_\varphi$ (העזרו בנוסחאות טריגונומטריות). חשבו את $(M_\theta)^n$.
ii . כיצד פועלת M_θ כט"ל על $\mathbb{R}^2$? (תנו הסבר גיאומטרי) הסבירו את התוצאה שקיבלתם עבור כפל מטריצות במונחים גיאומטריים.

5. יהי V מ"ו ממימד סופי n מעל שדה F, $A\in End_F(V)$ כלשהו
א. הראו כי $W_A=\{B\in End(V)\mid AB=0\}$ הנו תת מרחב לינארי של $End_F(V)$
ב. מצאו שלוש ט"ל A_1,A_2,A_3 מתאימות כך ש- $\dim_F W_{A_i}=0,n^2,n$ בהתאמה. (כדי לקבל את A_3 עבורה המימד n בחרו בסיס של V וחישבו כיצד להגדיר את פעולת A_3 על בסיס זה)

פתרון תרגיל 12 – אלגברה לינארית

1.א. נניח שהמטריצה המתאימה ל- T ביחס לבסיס $(v_1,...,v_n)$ היא $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$
נתבונן בבסיס $(v_1',...,v_n')$ המוגדר ע"י $v_j'=\lambda v_j$ עבור j כלשהו ($\lambda\neq 0$ סקלר) ו- $v_i'=v_i$ עבור $i\neq j$.

מתקיים $Tv_j'=T\lambda v_j=\lambda Tv_j=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_{ij}v_j=(\lambda a_{1j})v_1+...+\underline{a_{jj}(\lambda v_j)}+...+(\lambda a_{nj})v_n$

אם (b_{ij}) המטריצה המייצגת את T לפי בסיס זה אזי ממהגדרה לכל $i\neq j$ $b_{ij}=\lambda a_{ij}$.
אבל נתון ש- $(a_{ij})=(b_{ij})$ ומכאן $\lambda a_{ij}=a_{ij}\Rightarrow a_{ij}=0$ עבור $i\neq j$.

ב. נניח עתה שהבסיס $(v_1'',...v_n'')$ נתון ע"י $v_j''=v_{j+1}, v_{j+1}''=v_j$ עבור j כלשהו ו- $v_i''=v_i$ עבור $i\neq j,j+1$. אזי

$$Tv_{j+1}''=Tv_j=a_{1,j}v_1+...a_{j,j}v_j+a_{j+1,j}v_{j+1}+...+a_{1,n}v_n=a_{1,j}v_{1,j}''+...+a_{j+1,j}v_j''+a_{j,j}v_j''+...+a_{n,j}v_n''$$

לכן אם (c_{ij}) המטריצה המייצגת את T לפי בסיס זה מתקיים - $c_{j+1,j+1}=a_{j,j}$
אבל לפי הנתון $(c_{ij})=(a_{ij})$, לכן $a_{j,j}=a_{j+1,j+1}$. ומכאן ש- (a_{ij}) סקלרית, ומתרגיל קודם T סקלרית.

2.הוקטורים שהקואורדינטות שלהם ביחס לשני הבסיסים שוות הם הפתרונות של המערכת

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-1&2\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

או פתרונות המערכת ההומוגנית:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-2&2\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

פתרון המערכת מראה שיש פתרון יחיד $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

3.א. יהיו $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}, B=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$. $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$ נובע מחישוב פשוט
נחשב את $tr(AB)$: נניח $AB=(c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ לפי ההגדרה $c_{ii}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}$ לכן $tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}$
מאידך אם $BA=(d_{ij})_{1\le i,j\le n}$ אז $d_{jj}=\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij}$ לכן $tr(BA)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=tr(AB)$
כאשר השוויון האמצעי נובע פשוט משינוי סדר הסכימה.

ב. נניח $T,S:V\to V$ ט"ל המקיימות $TS-ST=I$ ונניח ש- A,B מטריצות המייצגות אותן לפי בסיס כלשהו. אזי לפי בסיס זה (כמו לפי כל בסיס) מטריצת היחידה I_n היא המטריצה המתאימה לטרנספורמצית הזהות. מההתאמה בין כפל וחיבור בין ט"ל ומטריצות מתקבל השוויון $AB-BA=I_n$, ולכן $tr(AB-BA)=tr(I_n)=n$ אבל לפי סעיף א' מתקיים
$tr(AB-BA)=tr(AB)-tr(BA)=0$ - סתירה.

ג. נתבונן במטריצות $T=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, S=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}_2)$ הפועלות על המרחב $V=(\mathbb{Z}_2)^2$ ע"י כפל המטריצות בוקטורים. מתקיים $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

(זכרו שהשדה הוא $\mathbb{Z}_2$!)

ד. נניח ש- $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ פולינום כלשהו.

$$D\circ T(P(x))=D(a_nx^{n+1}+a_{n-1}x^n+\dots+a_1x^2+a_0x)=(n+1)a_nx^n+na_{n-1}x^{n-1}+\dots+2a_1x+a_0$$

$$T\circ D(P(x))=T(na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\dots+a_1)=na_nx^n+(n-1)a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x$$

ולכן $\left(D\circ T-T\circ D\right)(P(x))=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=P(x)$ ולכן זוהי טרנספורמצית הזהות על $F[x]$

4. $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ - ההוכחה באינדוקציה. $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ ולכן כל לראות שעבור כל $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$.

ב.i.

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi&-(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi)\\\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi&\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\varphi)&-\sin\left(\theta+\varphi\right)\\\sin\left(\theta+\varphi\right)&\cos\left(\theta+\varphi\right)\end{pmatrix}$$

כלומר $M_\theta\cdot M_\varphi=M_{\theta+\varphi}$. מכאן גם נובע בקלות ש- $\left(M_\theta\right)^n=M_{n\theta}$

ii. אם נפעיל את M_θ על וקטורי הבסיס הסטנדרטי נקבל

$$M_\theta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix},M_\theta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$

אפשר לראות שזהו סיבוב שלהם בזוית θ נגד כיוון השעון. מלינאריות קל לראות שמכאן ש- M_θ מסובבת כל וקטור ב- $\mathbb{R}^2$ באותו אופן.

המכפלה $M_\theta\cdot M_\varphi$ מתאימה לסיבוב בזוית φ ואח"כ סיבוב בזוית θ כלומר לסיבוב בזוית $\varphi+\theta$ וזה מתאים למה שקיבלנו בסעיף הקודם.

5. א. באופן כללי לט"ל A,B,C מתקיים $A(B+C)=AB+AC, A(\lambda B)=\lambda AB$. מכאן נובעת הטענה באופן מידי.

ב. עבור $A_1=I$ (טרנס' הזהות) $B=0 \Leftrightarrow IB=0$. לכן $\dim W_{A_1}=0$.

עבור $A_2=0$ מתקיים $0B=0$ לכל ט"ל $B:V\to V$, לכן $\dim W_{A_2}=n^2$.

עבור A_3 נשים לב ש- $AB=0\Leftrightarrow \operatorname{Im}B\subseteq KerA_3$. נבחר בסיס $v_1,\dots,v_n$ למרחב, ונגדיר

$A_3v_1=0 \quad A_3v_i=v_i$ עבור $i\neq 1$. אזי $KerA_3=sp\{v_1\}$. לכן W_{A_3} מכיל את כל הט״ל מ- V למרחב החד מימדי $sp\{v_1\}$. כזכור מימד המרחב הזה הוא $\dim V\cdot\dim(sp\{v_1\})=n\cdot 1=n$

אלגברה ליניארית 1 תשס"ו – תרגיל מס' 13

1. פתרו את מערכת המשוואות הבאות מעל הרציונאליים:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=3 \\ 6x_1+2x_2+x_3=6 \\ -x_1+x_2+x_3-x_4=-1 \end{cases}$$

2. נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$$

א. מצאו שדה בו יש למערכת פיתרון השונה מ-(0,0,0).
ב. מצאו שדה בו יש למערכת פיתרון יחיד.

3. מצאו את כל המספרים הממשיים c כך שלמערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+cy+3z=2 \\ 2x+3y+cz=3 \end{cases}$$

א. קיים פיתרון יחיד מעל הממשיים.
ב. למערכת קיימים אינסוף פתרונות מעל הממשיים.
ג. למערכת לא קיים פיתרון מעל הממשיים.

4. עבור כל אחת מהמטריצה הממשיות הבאות, מצאו את ההופכית שלה:

א. $$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. $$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

5. תהא A המטריצה הנתונה בשאלה 4-א לעיל, מצאו פתרון למערכת המשוואות $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

מעל הממשיים.

אלגברה ליניארית 1 תשס"ו – פתרון תרגיל מס' 13

1. על מנת לפתור את המערכת נעבור למטריצה המורחבת המתאימה: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ שימו לב כי העמודה החמישית היא עמודת הפתרונות של המערכת. נבצע כעת על המטריצה את הפעולות האלמנטריות בכדי להגיע לצורת גאוס. ראשית נחליף את השורה הראשונה ברביעית:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(4)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

כעת נאפס את העמודה הראשונה ע"י השורה הראשונה:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1(1)\to(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-6(1)+(3)\to(3) \\ -3(1)+(4)\to(4)}]{-2(1)+(2)\to(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

נחלק את השורה השניה בשלוש ונמשיך לאפס את העמודה השניה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 8 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5(2)+(4)\to(4)]{-8(2)+(3)\to(3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-26}{3} & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-17}{3} & \frac{-8}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{-1(3)\to(3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{26}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-17}{3} & \frac{-8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)+(4)\to(4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{26}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

נחזור חזרה למשוואות ונקבל: $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_3 + \frac{26}{3}x_4 = \frac{8}{3} \\ 3x_4 = 0 \end{cases}$ מהמערכת הנ"ל אנו מקבלים פתרון אחד שהוא:

$$x_4 = 0, x_3 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{-7}{3}, x_1 = \frac{4}{3}$$

.

2. נעבור ממערכת המשוואות למטריצה המתאימה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (כיוון שהמערכת הומוגנית, התעלמנו מהעמודה הנוספת שמכילה רק אפסים). כעת נעבור למטריצה מדורגת בעזרת פעולות שורה. יש להיזהר מכיוון שאיננו יודעים באיזה שדה נעבוד, ולכן נבצע רק פעולות שיהיו מותרות בכל שדה.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[-3(1)+(3)\to(3)]{-2(1)+(2)\to(2)}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&-5&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{-1(2)\to(2)}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&5\\0&-5&-7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5(2)+(3)\to(3)}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&5\\0&0&18\end{pmatrix}$$

קיבלנו מערכת משוואות שקולה: $\begin{cases}x+2y+3z=0\\ y+5z=0\\ 18z=0\end{cases}$.

א. מעל השדה Z_3 מתקבלת המערכת $\begin{cases}x+2y=0\\ y+2z=0\\ 0=0\end{cases}$ שיש לה אינסוף פתרונות, למשל $x=y=z=1$.

ב. קל לראות שמעל הממשיים קיים פיתרון יחיד.

3. נעביר את המערכת למטריצה, וננסה לדרג אותה:

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&c&3&2\\2&3&c&3\end{pmatrix}\xrightarrow[-2(1)+(3)\to(3)]{-1(1)+(2)\to(2)}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&c-1&4&1\\0&1&c+2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&c+2&1\\0&c-1&4&1\end{pmatrix}$$

השלב הבא הוא לאפס את האיבר $c-1$ בשורה השלישית, כאן עלינו להיזהר כי איבר זה יכול להיות אפס. נחלק למקרים:

- $c=1$ - במקרה זה מערכת המשוואות השקולה המתקבלת היא: $\begin{cases}x+y-z=1\\ y+3z=1\\ 4z=1\end{cases}$ והפתרון היחיד של המערכת הזאת הוא $\left(1,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.
- $c\neq 1$ - נמשיך בתהליך הדרוג ונקבל: $\xrightarrow{-(c-1)(2)+(3)\to(3)}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&c+2&1\\0&0&-c^2-c+6&2-c\end{pmatrix}$

I. אם האיבר $-c^2-c+6$ אינו אפס, אזי קל לראות שדרגת המטריצה המורחבת שווה לדרגת המטריצה המצומצמת ושהדרגה היא 3. לכן במקרה כזה יהא פיתרון יחיד. זה קורה כאשר $c\neq 2,-3$.

II. נניח כי $-c^2-c+6=0$ (כלומר $c=2$ או $c=-3$). במקרה זה קיים פיתרון אם ורק אם $2-c=0$. לכן, אם $c=2$ השורה האחרונה כולה אפסים, ויש אינסוף פתרונות. ואם $c=-3$ לא קיים פיתרון.

נסכם:

א. למערכת קיים פתרון יחיד עבור $c\neq -3,2$.

ב. למערכת קיימים אינסוף פתרונות עבור $c=2$.

ג. למערכת אין פתרון עבור $c=-3$.

4-א. נרשום כפי שלמדנו:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1(1)\to(1)]{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-4(1)+(3)\to(3)]{-2(1)+(2)\to(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & -11 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3(2)+(3)\to(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1/5(2)\to(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3(2)+(1)\to(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/5 & 3/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3/5(3)+(1)\to(1)]{4/5(3)+(2)\to(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 12/5 & 7/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -11/5 & -6/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

לכן המטריצה ההופכית היא: $\begin{pmatrix} 12/5 & 7/5 & -3/5 \\ -11/5 & -6/5 & 4/5 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4 & 1.4 & -0.6 \\ -2.2 & -1.2 & 0.8 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4-ב. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. קיים פיתרון יחיד והוא: $A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/5 \\ -7/5 \\ -2 \end{pmatrix}$.