



כלים מתמטיים למדעי המחשב

מבחן סופי

השאלות הנבחרות: 1, 3, 6, 9
בנוס: 8

דינה זליגר

תוכן עניינים

2	חלק 1: הסתברות
2	שאלה 1
5	חלק 2: אלגברה לינארית
5	שאלה 3
5	סעיף א
5	סעיף ב
5	סעיף ג
6	סעיף ד
9	חלק 3: אופטימיזציה ותכנון לינארי
9	שאלה 6
9	סעיף א
9	סעיף ב
11	חלק 4: אנליזה הרמונית
11	שאלה 8: בונס
11	סעיף א
13	סעיף ב
13	סעיף ג
14	שאלה 9
14	סעיף א
18	סעיף ב
20	נספח

חלק 1: הסתברות

שאלה 1

נוכיח שקיים קבוע $0 < c$ שעבורו לכל משתנה מקרי אי-שלילי X בעל תוחלת ושוונת סופיות מתקיים

$$\Pr\left(X \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}X\right) \geq c \frac{\mathbb{E}^2 X}{\mathbb{E}X^2}$$

אי-שוויון קושי-שוורץ: יהיו Y, Z משתנים מקריים אי-שליליים עם תוחלת ושוונת סופיות. אזי

$$\mathbb{E}XY \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2} \sqrt{\mathbb{E}Y^2}$$

הוכחה: ראשית, יש להוכיח שהתוחלת של XY סופית. ואכן,

$$\mathbb{E}X^2 + 2\mathbb{E}XY + \mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) = \mathbb{E}(X + Y)^2 \stackrel{(*)}{\leq} \mathbb{E}(2X^2 + 2Y^2) = 2\mathbb{E}X^2 + 2\mathbb{E}Y^2$$

כאשר $(*)$ נכון כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ולכן

$$(x + y)^2 = 2xy + (x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) = 2x^2 + 2y^2$$

מאחר שהשוונת של X, Y סופית, גם $\mathbb{E}X^2, \mathbb{E}Y^2 < \infty$ ולכן ניתן להעביר אגפים ולקבל

$$\mathbb{E}XY \leq \frac{1}{2}(\mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2) < \infty$$

כעת, יהי $t \in \mathbb{R}$ כלשהו. אזי $(tX - Y)^2$ משתנה מקרי אי-שלילי ולכן

$$0 \leq \mathbb{E}(tX - Y)^2 = \mathbb{E}t^2 X^2 + \mathbb{E}(-2tXY) + \mathbb{E}Y^2 = t^2 \mathbb{E}X^2 - 2t\mathbb{E}XY + \mathbb{E}Y^2$$

$\mathbb{E}(tX - Y)^2 = 0$ אם $t = 0$ ולמשוואה זו יש רק פתרון אחד. לכן הדיסקרימיננטה של הביטוי $t^2 \mathbb{E}X^2 - 2t\mathbb{E}XY + \mathbb{E}Y^2$ חייבת להיות אי-חיובית (אילו הייתה חיובית ממש, אז היו שני פתרונות למשוואה):

$$\begin{aligned} 4(\mathbb{E}XY)^2 - 4\mathbb{E}X^2 \mathbb{E}Y^2 &\leq 0 \\ \Rightarrow (\mathbb{E}XY)^2 &\leq \mathbb{E}X^2 \mathbb{E}Y^2 \\ \Rightarrow \mathbb{E}XY &\leq \sqrt{\mathbb{E}X^2} \sqrt{\mathbb{E}Y^2} \end{aligned}$$

וזה מה שרצינו להראות. ☺

כעת נוכיח את הטענה שלנו. למעשה, נוכיח טענה קצת כללית יותר. נראה שלכל $\alpha \in (0, 1)$ מתקיים

$$\Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X) \geq (1 - \alpha)^2 \frac{\mathbb{E}^2 X}{\mathbb{E}X^2}$$

נפתח את התוחלת לפי ההגדרה:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \sum_{k \in \text{im } X} k \Pr(X = k) = \sum_{\substack{k \in \text{im } X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} k \Pr(X = k) + \sum_{\substack{k \in \text{im } X \\ k \geq \alpha \mathbb{E}X}} k \Pr(X = k) = \\ &= \sum_{\substack{k \in \text{im } X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} k \Pr(X = k) + \left(\sum_{\substack{k \in \text{im } X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} 0 \cdot k \Pr(X = k) + \sum_{\substack{k \in \text{im } X \\ k \geq \alpha \mathbb{E}X}} 1 \cdot k \Pr(X = k) \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{k \in \text{im } X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} k \Pr(X = k) + \sum_{k \in \text{im } X} g(k) \Pr(X = k)$$

כאשר

$$g(k) = \begin{cases} 0, & k < \alpha \mathbb{E}X \\ k, & k \geq \alpha \mathbb{E}X \end{cases} = k \cdot \chi_{\{x \in \text{im } X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}}(k)$$

אבל לפי משפט הסטטיסטיקאי חסר ההכרה נובע ש-

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \sum_{\substack{k \in \text{im } X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} k \Pr(X = k) + \sum_{k \in \text{im } X} g(k) \Pr(X = k) = \sum_{\substack{k \in \text{im } X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} k \Pr(X = k) + \mathbb{E}g(X) = \\ &= \sum_{\substack{k \in \text{im } X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} k \Pr(X = k) + \mathbb{E}X \chi_{\{x \in \text{im } X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}} \leq \alpha \mathbb{E}X \sum_{\substack{k \in \text{im } X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} \Pr(X = k) + \mathbb{E}X \chi_{\{x \in \text{im } X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}} = \\ &= \alpha \mathbb{E}X \Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) + \mathbb{E}X \chi_{\{x \in \text{im } X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}} \end{aligned}$$

נחיל כעת את אי-שוויון קושי שזורץ על המחובר השני :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &\leq \alpha \mathbb{E}X \Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) + \mathbb{E}X \chi_{\{x \in \text{im } X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}} \leq \\ &\leq \alpha \mathbb{E}X \Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) + \sqrt{\mathbb{E}X^2} \sqrt{\mathbb{E} \chi_{\{x \in \text{im } X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}}^2} = \\ &\stackrel{\chi = \chi^2}{=} \alpha \mathbb{E}X \Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) + \sqrt{\mathbb{E}X^2} \sqrt{\mathbb{E} \chi_{\{x \in \text{im } X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}}} = \\ &= \alpha \mathbb{E}X \Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) + \sqrt{\mathbb{E}X^2} \sqrt{\Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X)} \leq \\ &= \alpha \mathbb{E}X + \sqrt{\mathbb{E}X^2} \sqrt{\Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X)} \end{aligned}$$

נעביר אגפים ונעשה כמה מניפולציות אלגבריות :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &\leq \alpha \mathbb{E}X + \sqrt{\mathbb{E}X^2} \sqrt{\Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X)} \\ \Rightarrow (1 - \alpha) \mathbb{E}X &\leq \sqrt{\mathbb{E}X^2} \sqrt{\Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X)} \\ \Rightarrow (1 - \alpha)^2 \mathbb{E}^2 X &\leq \mathbb{E}X^2 \Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X) \\ \Rightarrow \Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X) &\geq (1 - \alpha)^2 \frac{\mathbb{E}^2 X}{\mathbb{E}X^2} \end{aligned}$$

אנחנו מעוניינים ב- $\alpha = \frac{1}{2}$ ולכן במקרה שלנו נקבל

$$\Pr\left(X \geq \frac{1}{2} \mathbb{E}X\right) \geq \frac{1}{4} \frac{\mathbb{E}^2 X}{\mathbb{E}X^2}$$

נעיר רק לגבי טיב החסם. בהוכחה של הטענה הכללית השתמשנו בכך ש- $\Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) \leq 1$. לכאורה זה חסם גס מאוד, אבל למעשה במקרה הכללי אי אפשר להגיד משהו טוב יותר. למשל אם נתבונן במשתנה מקרי המוגדר לכל $m \in \mathbb{N}$ ע"י

$$X_m = \begin{cases} m, & \frac{1}{m} \\ 0, & \frac{m-1}{m} \end{cases}$$

אז מתקיים $\mathbb{E}X = m \Pr(X = m) = 1$. כמו כן נזכור ש- $\alpha < 1$ ולכן $\{x: X(x) < \alpha\} = \{x: X(x) = 0\}$. מכאן,

$$\Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) = \Pr(X < \alpha) = \Pr(X = 0) = \frac{m-1}{m}$$

והסתברות זו קרובה ל-1 כרצוננו...

חלק 2: אלגברה לינארית

שאלה 3

אם $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, נגדיר את הגרף הקווי המתאים $L(G) = (\bar{V}, \bar{E})$ באופן הבא:

$$\bar{V} = E$$

$$\forall (x, y), (u, v) \in E \quad ((x, y), (u, v)) \in \bar{E} \Leftrightarrow |\{x, y\} \cap \{u, v\}| = 1$$

נניח שהקודקודים הם $\{v_1, \dots, v_n\}$ והצלעות הן $\{e_1, \dots, e_m\}$. נגדיר מטריצה $X \in M_{n \times m}(0, 1)$ באופן הבא:

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ and } e_j \text{ are incident} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

סעיף א

נראה שכל הערכים העצמיים של $L(G)$ הם לפחות -2 .

למה 1: מטריצת השכנויות של $L(G)$ היא $B = X^t X - 2I_m$.

הוכחה: נסמן את העמודות של X ב- x_1, \dots, x_m . אז עבור $i \neq j$:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n [X^t]_{ik} [X]_{kj} = \sum_{k=1}^n x_{ki} x_{kj} = \langle x_i, x_j \rangle$$

זו המכפלה הפנימית של שתי עמודות שונות של X . נשים לב שמכפלה זו שונה מאפס אמ"מ יש k שעבור $x_{ki} = x_{kj} = 1$, כלומר k קודקוד שמחובר גם ל- e_i וגם ל- e_j . למעשה המכפלה היא מספר הקודקודים שחלים גם על e_i וגם על e_j . יכול להיות לכל היותר קודקוד אחד כזה כי אם יש שניים אז $e_i = e_j$. לכן $b_{ij} = 1$ אמ"מ יש לצלעות המתאימות קודקוד משותף אחד. באופן דומה, אם $i = j$ אז יש שני קודקודים שחלים על שתי הצלעות (כי הן זהות!) ואז $b_{ij} = \sum_{k=1}^n [X^t]_{ik} [X]_{kj} - 2 = \sum_{k=1}^n x_{ki} x_{kj} - 2 = 2 - 2 = 0$ וזה מה שרצינו. ☺

מסקנה: יהי λ ערך עצמי של $L(G)$. אזי $\lambda \geq -2$.

הוכחה: לפי אחד התנאים השקולים שלמדנו בכיתה¹, המטריצה $X^t X$ היא PSD, כלומר כל הערכים העצמיים שלה הם אי-שליליים. אבל אם μ ערך עצמי של A אז $\mu - c$ ערך עצמי של $A - cI$, שהרי אם v וקטור עצמי מתאים אז $(\mu - c)v = Av - cv = \mu v - cv = (\mu - c)v$. במקרה שלנו $A = X^t X$ ו- $c = 2$. מאחר ש- $\mu \geq 0$ נובע ש- $\mu - 2 \geq -2$. ☺

סעיף ב

נראה שאם $|E| > |V|$ אז -2 ערך עצמי של $L(G)$.

לפי למה 1 מספיק להראות ש-0 הוא ערך עצמי של $X^t X$. בתרגיל 3 הוכחנו שאם $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ כאשר $m \leq n$ אז m הערכים העצמיים הגדולים ביותר של $Q^t Q$ ושל $Q Q^t$ זהים ושאר הערכים העצמיים של $Q^t Q$ הם אפס. כאן $X \in M_{|V| \times |E|}(\mathbb{R})$ ונתון ש- $|V| < |E|$. לכן 0 ערך עצמי של $X^t X$ וזה מה שרצינו.

סעיף ג

נניח ש- d גרף-רגולרי עם ספקטרום $\text{spec}(G) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. נראה ש-

¹ סיכומי הרצאה 7, טענה 37

$$\text{spec}(L(G)) = \begin{cases} \{0\}, & d = 1 \\ \{\lambda_i\}_{i=1}^n, & d = 2 \\ \{\lambda_i + d - 2\}_{i=1}^n \cup \{-2\}, & d > 2 \end{cases}$$

למה 2: בסימונים של סעיף א, $A_G = XX^t - dI_n$,

הוכחה: באופן דומה להוכחה הקודמת. מתקיים $[XX^t]_{ij} = \langle x^i, x^j \rangle$ כאשר x^k השורה ה- k של X . מכפלה זו סופרת את מספר הצלעות שחלות גם על v_i וגם כל v_j . אם הקודקודים שווים אז בגלל ה- d -רגולריות מספר הצלעות הוא d ולכן $[XX^t - dI_n]_{ii} = 0$ כפי שצריך. אם הקודקודים שונים אז מספר הצלעות שחל על שניהם הוא לכל היותר $1 - 0$ אם הם לא מחוברים ו- 1 אם הם מחוברים. וזו בדיוק ההגדרה של מטריצת שכנויות. ©

כעת, אם $d = 1$ אז כל קודקוד משתתף בצלע אחת בלבד ולכן $L(G) = 0$. בפרט $\text{spec}(L(G)) = \{0\}$.

$X \in M_{n \times |E|}(\mathbb{R})$ וכאשר $d \geq 2$ מתקיים $n \leq |E|$. לכן במקרה זה n הערכים העצמיים הגדולים ביותר של $X^t X$ ושל XX^t הם זהים. נסמן אותם ב- $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. לפי למה 2 $\{\mu_i - d\}_{i=1}^n$ הם הערכים העצמיים של G ולכן מתקיים $\mu_i = \lambda_i + d$. אבל עכשיו לפי למה 1 מתקיים

$$\begin{aligned} \text{spec}(L(G)) = \{\mu_i - d\}_{i=1}^{|E|} &= \begin{cases} \{\lambda_i + d - 2\}_{i=1}^n, & |E| = n \\ \{\lambda_i + d - 2\}_{i=1}^n \cup \{0 - 2\}_{i=n+1}^{|E|}, & |E| < n \end{cases} \\ &= \begin{cases} \{\lambda_i + d - 2\}_{i=1}^n, & d = 2 \\ \{\lambda_i + d - 2\}_{i=1}^n \cup \{-2\}, & d > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

אגב, נעיר רק שבמקרה ש- $d > 2$ הריבוי של הערך העצמי של -2 הוא $|E| - n$ (כי $L(G)$ סימטרית ולכן לכסינה ויש לה $|E|$ ערכים עצמיים).

סעיף ד

תהי A מטריצה ממשית בגודל $\binom{n}{2} \times \binom{n}{3}$ המוגדרת לכל $|S| = 2$ ו- $|T| = 3$ ע"י

$$A_{S,T} = \begin{cases} 1, & S \subseteq T \\ 0, & S \not\subseteq T \end{cases}$$

נחשב את הערכים הסינגולריים של A .

הערכים הסינגולריים של A הם שורשי הערכים העצמיים של AA^t . עבור $|S| = |Q| = 2$ מתקיים:

$$[AA^t]_{S,Q} = \sum_{|R|=3} A_{S,R} A_{Q,R}$$

$A_{S,R} A_{Q,R} = 1$ אם $S \subseteq R$ ו- $Q \subseteq R$, כלומר אם $S \cup Q \subseteq R$. זה קורה אם $S \cup Q \subseteq R$. יש כמה אפשרויות:

- אם $S \cap Q = \emptyset$ אז $S \cup Q \subseteq R$ מכילה ארבעה איברים ולכן לא יכולה להיות קבוצה R כנ"ל. לכן במקרה זה

$$[AA^t]_{S,Q} = \sum_{|R|=3} A_{S,R} A_{Q,R} = 0$$

- אם $|S \cap Q| = 2$ אז הקבוצות שוות ויש בדיוק $n - 2$ קבוצות R כנ"ל ולכן

$$[AA^t]_{S,Q} = \sum_{|R|=3} A_{S,R} A_{Q,R} = n - 2$$

• אם $|S \cap Q| = 1$ אז $|S \cup Q| = 3$ ולכן יש קבוצה אחת R שעומדת בתנאים. כלומר,

$$[AA^t]_{S,Q} = \sum_{|R|=3} A_{S,R} A_{Q,R} = 1$$

לכן אם נתבונן במטריצה AA^t אז על האלכסון שלה מופיע $n - 2$ ושאר האיברים הם 0 או 1. נציג את AA^t ע"י $B \in M_{\binom{n}{2}}(\mathbb{Z}^2)$ כאשר $AA^t = B + (n - 2)I_{\binom{n}{2}}$. ב- B מתקיים

$$B_{S,Q} = \begin{cases} 0, & |S \cap Q| \neq 1 \\ 1, & |S \cap Q| = 1 \end{cases}$$

נתבונן בקליקה $G = K_n$. יש ל- G n קודקודים ו- $\binom{n}{2}$ צלעות. הגרף הקווי המתאים הוא

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \{\{x, y\} \subseteq [n] : x \neq y\} \\ \bar{E} &= \{\{\{x, y\}, \{u, v\}\} : |\{x, y\} \cap \{u, v\}| = 1\} \end{aligned}$$

נטען שמטריצת השכנויות המתאימה היא בדיוק B . אכן, אם $\{S, Q\} \in \bar{E}$ אז $|S \cap Q| = 1$ ולכן $B_{S,Q} = 1$ ואילו אם $\{S, Q\} \notin \bar{E}$ אז $|S \cap Q| \neq 1$ ולכן $B_{S,Q} = 0$.

הקליקה K_n היא גרף $n - 1$ רגולרי. מן הסתם יש לנו עניין רק ב- $n \geq 3$ ולכן לפי הסעיף הקודם

$$\text{spec}(B) = \text{spec}(L(K_n)) = \begin{cases} \{\lambda_i\}_{i=1}^n, & n = 3 \\ \{\lambda_i + n - 3\}_{i=1}^n \cup \{-2\}, & n > 3 \end{cases}$$

כאשר $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \text{spec}(K_n)$.

אז אם נחשב את $\text{spec}(K_n)$ נקבל את $\text{spec}(AA^t)$ ע"י:

$$\text{spec}(AA^t) = \text{spec}(B) + (n - 2) = \begin{cases} \{\lambda_i + 1\}_{i=1}^n, & n = 3 \\ \{\lambda_i + 2n - 5\}_{i=1}^n \cup \{n - 4\}, & n > 3 \end{cases}$$

לכן נותר לנו לחשב את $\text{spec}(K_n)$. מטריצת השכנויות של K_n היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נחשב את הערכים העצמיים שלה²:

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} - xI \right) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & -x \end{pmatrix} = (-x + (n - 1))(-x - 1)^{n-1}$$

לכן הערכים העצמיים של K_n הם -1 בריבוי $n - 1$ ו- $n - 1$ בריבוי 1.

² ר' חישוב בנספח

נסכם את התוצאות. הערכים הסינגולריים של A כאשר $n > 3$ הם:

ריבוי	ערך סינגולרי
$n - 1$	$\sqrt{-1 + 2n - 5} = \sqrt{2n - 6}$
1	$\sqrt{n - 1 + 2n - 5} = \sqrt{3n - 6}$
השאר	$\sqrt{n - 4}$

אם $n = 3$ אז הערכים העצמיים של K_n הם $\{-1, -1, 2\}$ ולכן הערכים העצמיים של AA^t הם $\{0, 0, 3\}$ והערך הסינגולרי היחיד הוא $\sqrt{3}$.

חלק 3: אופטימיזציה ותכנון לינארי

שאלה 6

יהי $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^d$. נגדיר מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ ע"י $A_{ij} = \|z_i - z_j\|_1$. נסמן ב- \mathcal{L}_n את אוסף המטריצות שניתן ליצור באופן זה. נשים לב ש- d אינו פרמטר של \mathcal{L}_n ושהמטריצות ב- \mathcal{L}_n יכולות להיווצר מאוספי וקטורים מממדים שונים.

סעיף א

נכיח ש- \mathcal{L}_n סגור לחיבור. כלומר בהינתן $A, B \in \mathcal{L}_n$ גם $A + B \in \mathcal{L}_n$. נסמן

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{d_1} |z_i^k - z_j^k|$$
$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{d_2} |w_i^k - w_j^k|$$

$$\text{אז } [A + B]_{ij} = \sum_{k=1}^{d_1} |z_i^k - z_j^k| + \sum_{k=1}^{d_2} |w_i^k - w_j^k|$$

נגדיר n וקטורים חדשים $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ באופן הבא:

$$u_i^k = \begin{cases} z_i^k, & k \leq d_1 \\ w_i^k, & k > d_1 \end{cases}$$

נטען ש- $A + B$ מתקבלת מאוסף וקטורים זה. ואכן:

$$\begin{aligned} \|u_i - u_j\|_1 &= \sum_{k=1}^{d_1+d_2} |u_i^k - u_j^k| = \sum_{k=1}^{d_1} |u_i^k - u_j^k| + \sum_{k=d_1+1}^{d_1+d_2} |u_i^k - u_j^k| = \\ &= \sum_{k=1}^{d_1} |z_i^k - z_j^k| + \sum_{k=1}^{d_2} |w_i^k - w_j^k| = [A + B]_{ij} \end{aligned}$$

לכן $A + B \in \mathcal{L}_n$.

סעיף ב

יהי Z אוסף המטריצות ב- \mathcal{L}_n שאיבריהן ב- $\{0,1\}$, כלומר $Z = \{A \in M_n(\mathbb{Z}_2) : A \in \mathcal{L}_n\}$. נוכיח ש-

$$\mathcal{L}_n = \text{cone } Z = \left\{ \sum_{i=1}^N a_i z_i : \forall 1 \leq i \leq N (z_i \in Z \wedge a_i \geq 0) \right\}$$

צריך להוכיח הכלה לשני הכיוונים.

בסעיף הקודם ראינו ש- \mathcal{L}_n סגור לחיבור. ברור גם שהוא סגור לכפל בסקלר חיובי. שהרי אם

$$A_{ij} = \|z_i - z_j\|_1 = \sum_{k=1}^d |z_i^k - z_j^k|$$

ונגדיר $B = aA$ עבור $a \geq 0$ אז

$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= aA_{ij} = a\|z_i - z_j\|_1 = a \sum_{k=1}^d |z_i^k - z_j^k| = \sum_{k=1}^d a|z_i^k - z_j^k| = \sum_{k=1}^d |a||z_i^k - z_j^k| = \\
 &= \sum_{k=1}^d |a(z_i^k - z_j^k)| = \sum_{k=1}^d |az_i^k - az_j^k|
 \end{aligned}$$

ולכן אם נגדיר $w_i = az_i$ לכל $1 \leq i \leq n$ נקבל ש- $B_{ij} = \|w_i - w_j\|_1$, כלומר $B = aA \in \mathcal{L}_n$.

מההגדרה ברור ש- $Z \subseteq \mathcal{L}_n$ ולכן $\text{cone } Z \subseteq \mathcal{L}_n$ (שהרי איברי $\text{cone } Z$ מתקבלים מפעולות חיבור וכפל בסקלר חיובי על איברי Z ו- \mathcal{L}_n סגור תחת פעולות אלה).

נטר להוכיח ש- $\mathcal{L}_n \subseteq \text{cone } Z$. צריך להראות שכל מטריצה $A \in \mathcal{L}_n$ ניתנת להצגה כצירוף של מטריצות מ- Z . ניתן להניח ש- A נוצרה ע"י וקטורים $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^d$, שהרי אחרת, לפי מה שראינו בסעיף הקודם מתקיים $A = \sum_{k=1}^d A_i$ כאשר $A_i \in \mathcal{L}_n$ נוצרה ע"י הרכיבים z_1^i, \dots, z_n^i של $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^d$. אז אם כל אחת מה- A_i צירוף של מטריצות מ- Z , נקבל שגם A צירוף של מטריצות מ- Z .

כעת ניסיתי הרבה דברים שונים כדי להוכיח את הטענה אבל לצערי לא הצלחתי. הנה שני רעיונות שנראו לי יותר מבטיחים:

1. לייצר רשימה של כל המטריצות ב- Z , להניח ש- $A = \sum_{i=1}^m a_i z_i$. זה יוצר מערכת של $n(n-1)$ משוואות ב- m נעלמים.

2. להרחיב את המימד של הווקטורים כך שהמרחקים ביניהם לא ישתנו אבל אפשר יהיה לחלק אותם לבלוקים כך שמרחק בין בלוקים מתאימים בווקטורים שונים יהיה 0 או 1.

חלק 4: אנליזה הרמונית

שאלה 8: בונוס

פונקציה בוליאנית היא פונקציה $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$. פונקציה כזאת נקראת מאוזנת אם

$$\#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) = 0\} = \#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) = 1\}$$

עבור $u, v \in \{0,1\}^n$ נאמר ש- $u < v$ אם לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $v_i \leq u_i$. פונקציה בוליאנית נקראת מונוטונית אם עבור $u < v$ מתקיים $f(v) \leq f(u)$.

נגדיר את ההשפעה של i על פונקציה בוליאנית $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ ע"י

$$I_i(f) = \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) \neq f(x + e_i)\}$$

סעיף א

נראה שעבור פונקציה בוליאנית מאוזנת מתקיים $\sum_{i \in [n]} I_i(f) \geq 1$.

נבצע תהליך דומה למה שעשינו בכיתה³:

$$I_i(f) = \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) \neq f(x + e_i)\} = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \delta_{f(x) \neq f(x + e_i)}$$

אבל $f(x) \in \{0,1\}$ לכל $x \in \{0,1\}^n$ ולכן $f(x) \neq f(y)$ אם $(f(x) - f(y))^2 = 1 = 1^2 = (f(x) - f(y))^2$. לכן,

$$I_i(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \delta_{f(x) \neq f(x + e_i)} = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (f(x) - f(x + e_i))^2$$

נגדיר כעת $f_i(x) = f(x + e_i)$. לפי שוויון פרסוול, לכל פונקציה בוליאנית $g: \{0,1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ מתקיים $\frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} g^2(x) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} \hat{g}^2(x)$ ואם נזכור גם את הלינאריות של טרנספורם פורייה, נקבל:

$$\begin{aligned} I_i(f) &= \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (f(x) - f(x + e_i))^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (f(x) - f_i(x))^2 = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (f - f_i)^2(x) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} (\widehat{f - f_i})^2(x) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} (\hat{f} - \hat{f}_i)^2(x) = \\ &= \sum_{x \in \{0,1\}^n} (\hat{f}(x) - \hat{f}_i(x))^2 \end{aligned}$$

נטען כעת ש-

$$\hat{f}_i(a) = \begin{cases} \hat{f}(a), & a_i = 0 \\ -\hat{f}(a), & a_i = 1 \end{cases}$$

כדי להראות זאת נראה ש- $h = 2^n g * h$ כאשר $f_i = 2^n g * h$. אכן,

³ למעשה, נעתיק את זה בצורה מסודרת ©

$$2^n (f * h)(x) = \frac{2^n}{2^n} \sum_{y \in \{0,1\}^n} f(y)h(x-y) = f(y)$$

כאשר y כך ש- $x-y = e_i$, כלומר $y = x - e_i = x + e_i$ (נזכור שאנחנו עובדים ב- \mathbb{Z}_2). כלומר אכן $x \in \{0,1\}^n$ לכל $2^n (f * h)(x) = f(x + e_i) = f_i(x)$

כעת, נטען ש- $\hat{h}(x) = \frac{1}{2^n} \chi_a(e_i) = \frac{(-1)^{a_i}}{2^n}$ ואכן,

$$\hat{h}(a) = \langle h, \chi_a \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} h(x) \chi_a(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \delta_{x=e_i} \chi_a(x) = \frac{1}{2^n} \chi_a(e_i)$$

עכשיו, בגלל הקשר שבין קונבולוציה לטרנספורם פורייה נוכל לקבל את $\hat{f}_i(a)$:

$$\hat{f}_i(a) = 2^n \hat{f}(a) \cdot \hat{h}(a) = \hat{f}(a) (-1)^{a_i} = \begin{cases} \hat{f}(a), & a_i = 0 \\ -\hat{f}(a), & a_i = 1 \end{cases}$$

עכשיו נוכל להמשיך את החישוב של ההשפעה:

$$\begin{aligned} I_i(f) &= \sum_{x \in \{0,1\}^n} (\hat{f}(x) - \hat{f}_i(x))^2 = \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=1}} (\hat{f}(x) - \hat{f}_i(x))^2 + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=0}} (\hat{f}(x) - \hat{f}_i(x))^2 = \\ &= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=1}} (\hat{f}(x) + \hat{f}(x))^2 + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=0}} (\hat{f}(x) - \hat{f}(x))^2 = \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=1}} 4\hat{f}^2(x) = 4 \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=1}} \hat{f}^2(x) \end{aligned}$$

נחסום את סכום ההשפעות:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n I_i(f) &= \sum_{i=1}^n 4 \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=1}} \hat{f}^2(x) = 4 \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=1}} \hat{f}^2(x) = 4 \sum_{i=1}^n \sum_{i \in S} \hat{f}^2(S) = \\ &= 4 \sum_{S \neq \emptyset} |S| \hat{f}^2(S) \geq 4 \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}^2(S) \end{aligned}$$

כאשר האי שוויון האחרון נכון משום שאם $S \neq \emptyset$ אז $|S| > 1$.

כדי להשלים את המשימה נותר לנו לחשב את $\sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}^2(S)$. למעשה, נרצה להראות ש- $\sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}^2(S) = \frac{1}{4}$. ואכן, נשתמש שוב בשוויון פרסוול כדי לקבל:

$$\sum_S \hat{f}^2(S) = \frac{1}{2^n} \sum_S f^2(S) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2^n} \sum_S f(S) \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{2}$$

כאשר $(*)$ נכון בגלל שטווח הפונקציה הוא $\{0,1\}$ ולכן תמיד $f = f^2$ ו- $(**)$ נכון בגלל שהפונקציה מאוזנת.

$$\text{לבסוף, } \hat{f}(\emptyset) = \langle f, \chi_\emptyset \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^0 = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) = \frac{1}{2}, \text{ ולכן}$$

$$\sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}^2(S) = \sum_S \hat{f}^2(S) - \hat{f}^2(\emptyset) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

ולכן נוכל לקבל את מה שרצינו:

$$\sum_{i=1}^n I_i(f) \geq 4 \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}^2(S) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

סעיף ב

נראה שעבור פונקציה מאוזנת מונוטונית מתקיים $\sum_{i=1}^n I_i^2(f) \leq 1$.

נשתמש במונוטוניות של f כדי לחשב את ההשפעה.

$$\begin{aligned} I_i(f) &= \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) \neq f(x + e_i)\} = \\ &= \frac{1}{2^n} (\#\{x \in \{0,1\}^n : x_i = 0 \wedge f(x) \neq f(x + e_i)\} + \#\{x \in \{0,1\}^n : x_i = 1 \wedge f(x) \neq f(x + e_i)\}) \\ &= \frac{1}{2^n} (\#\{x \in \{0,1\}^n : x_i = 0 \wedge f(x) \neq f(x + e_i)\} \\ &\quad + \#\{y \in \{0,1\}^n : y_i = 0 \wedge f(y + e_i) \neq f(y)\}) = \\ &= \frac{1}{2^n} 2 \cdot |\{x \in \{0,1\}^n : x_i = 0 \wedge f(x) \neq f(x + e_i)\}| = \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=0}} (f(x + e_i) - f(x)) = -\frac{2}{2^n} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=0}} (f(x) - f(x + e_i)) = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2^n} \left(\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=0}} f(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=0}} f(x + e_i) \right) = -2 \cdot \frac{1}{2^n} \left(\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=0}} f(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i=1}} f(x) \right) = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^{x_i} = -2 \hat{f}(e_i) \end{aligned}$$

כעת נסכום:

$$\sum_{i=1}^n I_i^2(f) = \sum_{i=1}^n (-2 \hat{f}(e_i))^2 = 4 \sum_{i=1}^n \hat{f}^2(e_i)$$

אם נראה ש- $\sum_{i=1}^n \hat{f}^2(e_i) \leq \frac{1}{4}$ נקבל את הדרוש. נשתמש בתוצאות של הסעיף הקודם:

$$\sum_{i=1}^n \hat{f}^2(e_i) = \sum_{|S|=1} \hat{f}^2(S) \stackrel{\text{הוספנו מחוברים אי שליליים}}{\leq} \sum_{|S| \geq 1} \hat{f}^2(S) = \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}^2(S) = \frac{1}{4}$$

סעיף ג

החסמים לעיל הם הדוקים.

למשל, בהינתן n , נתבונן בפונקציה $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$ ברור שזו פונקציה מאוזנת והיא כמובן גם מונוטונית כי אם $x < y$ אז $x_1 \leq y_1 = f(y) = f(x)$. מתקיים

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) \neq f(x + e_1)\} = \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : x_1 \neq x_1 + 1\} = 1 \\ \forall i > 1 \quad I_i(f) &= \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) \neq f(x + e_i)\} = \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : x_1 \neq x_1\} = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n I_i(f) = 1 = \sum_{i=1}^n I_i^2(f)$$

שאלה 9

k -רוב היא פונקציה בוליאנית $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ המוגדרת ע"י

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < k \\ 1, & |x| \geq k \end{cases}$$

סעיף א

נחשב את מקדמי הפורייה של פונקציית 2-רוב.

ראשית, נשים לב שיש טעם לדון רק במקרה ש- $n \geq 2$. אחרת הפונקציה היא פשוט $f \equiv 0$ ואז גם $\hat{f} \equiv 0$. לכן נניח מעתה ש- $n \geq 2$.

נוח להתבונן במרחב $\{0,1\}^n$ כאילו הוא מסודר מהקטן לגדול כאשר מסתכלים על האיברים כמספרים טבעיים בבסיס בינארי. למשל, עבור $n = 3, 4$ הסדר הוא כזה:

$$\begin{array}{cccc} & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad -1$$

בהמשך נעשה חישובים קומבינטוריים שישמשו במבנה הזה.

באופן כללי, מתקיים

$$\hat{f}(a) = \langle f, \chi_a \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) \chi_a(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^{\langle a, x \rangle} = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^{\sum_{i=1}^n a_i x_i}$$

לכן, עבור $a = (0, \dots, 0)$ מתקיים

$$\hat{f}(0, \dots, 0) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^0 = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x)$$

זה למעשה הממוצע של הפונקציה. נתבונן בטבלה של $\{0,1\}^n$. בחצי התחתון שלה כל האיברים מתחילים ב-1 ולכן פרט לווקטור הראשון $(1, 0, \dots, 0)$ לכל האיברים יש לפחות שתי אחדות. לכן הסכום של הפונקציה על החצי התחתון של הטבלה הוא $2^{n-1} - 1$. כעת יש לספור את האיברים שבחצי העליון של הטבלה. שם כל האיברים מתחילים ב-0 אלא שאם נתבונן במקום השני, שוב נגלה אותה החוקיות. נחלק את החצי העליון לשניים ונספור שם את האיברים הדרושים. כך מתקבל הסכום הבא:

$$\begin{aligned}
2^n \hat{f}(0, \dots, 0) &= \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) = \#\{x \in \{0,1\}^n : |x| \geq 2\} = \\
&= (2^{n-1} - 1) + (2^{n-2} - 1) + \dots + (2^{n-(n-1)} - 1) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i} - (n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} 2^i - (n-1) = (2^n - 2) - (n-1) = 2^n - n - 1
\end{aligned}$$

נחשב עוד כמה ערכים לדוגמה:

$$\begin{aligned}
2^n \hat{f}(1, 0, \dots, 0) &= \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^{\sum_{i=1}^n a_i x_i} = \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^{x_1} = \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=0}} f(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=1}} f(x) = \\
&= ((2^{n-2} - 1) + (2^{n-3} - 1) + \dots + (2^{n-(n-1)} - 1)) - (2^{n-1} - 1) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} 2^i - (n-2) - (2^{n-1} - 1) = (2^{n-1} - 2) - (n-2) - (2^{n-1} - 1) = -n + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^n \hat{f}(1, 1, 0, \dots, 0) &= \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^{\sum_{i=1}^n a_i x_i} = \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^{x_1+x_2} = \\
&= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1+x_2=0}} f(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1+x_2=1}} f(x) = \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=x_2}} f(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 \neq x_2}} f(x) = \\
&= \left(\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=x_2=1}} f(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=x_2=0}} f(x) \right) - \left(\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=1 \\ x_2=0}} f(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=0 \\ x_2=1}} f(x) \right) = \\
&= (2^{n-2} + ((2^{n-3} - 1) + \dots + (2 - 1))) - ((2^{n-2} - 1) + (2^{n-2} - 1)) = \\
&= \left(2^{n-2} + \sum_{i=1}^{n-3} 2^i - (n-3) \right) - (2^{n-1} - 2) = \\
&= (2^{n-2} + (2^{n-2} - 2) - (n-3)) - (2^{n-1} - 2) = \\
&= (2^{n-1} - n + 1) - (2^{n-1} - 2) = -n + 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^n \hat{f}(1, 1, 1, 0, \dots, 0) &= \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^{\sum_{i=1}^n a_i x_i} = \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^{x_1+x_2+x_3} = \\
&= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1+x_2+x_3=0}} f(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1+x_2+x_3=1}} f(x) = \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1+x_2=x_3}} f(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1+x_2 \neq x_3}} f(x) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1+x_2=x_3=1}} f(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1+x_2=x_3=0}} f(x) \right) - \left(\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1+x_2=1 \\ x_3=0}} f(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1+x_2=0 \\ x_3=1}} f(x) \right) = \\
&= \left(\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 \neq x_2 \\ x_3=1}} f(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=x_2 \\ x_3=0}} f(x) \right) - \left(\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 \neq x_2 \\ x_3=0}} f(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=x_2 \\ x_3=1}} f(x) \right) = \\
&= \left(2 \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=0 \\ x_2=1 \\ x_3=1}} f(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=x_2=0 \\ x_3=0}} f(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=x_2=1 \\ x_3=0}} f(x) \right) \\
&- \left(2 \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=0 \\ x_2=1 \\ x_3=0}} f(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=x_2=0 \\ x_3=1}} f(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1=x_2=1 \\ x_3=1}} f(x) \right) = \\
&= (2 \cdot 2^{n-3} + ((2^{n-4} - 1) + \dots + (2 - 1)) + 2^{n-3}) \\
&- (2 \cdot (2^{n-3} - 1) + (2^{n-3} - 1) + 2^{n-3}) = \\
&= (2 \cdot 2^{n-3} + (2^{n-3} - 2) - (n - 4) + 2^{n-3}) - (5 \cdot 2^{n-3} - 3) = \\
&= (4 \cdot 2^{n-3} - n + 2) - (4 \cdot 2^{n-3} - 3) = -n + 5
\end{aligned}$$

נכליל ונקבל

$$\begin{aligned}
2^n \hat{f}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) &= \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^{\sum_{i=1}^n a_i x_i} = \\
&= \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x) (-1)^{x_1 + \dots + x_k} = \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 + \dots + x_k = 0}} f(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 + \dots + x_k = 1}} f(x)
\end{aligned}$$

נותר לחשב את שני מחוברים אלה. לצורך כך נחשב ראשית את

$$\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ \forall 1 \leq i \leq k \ x_i = \varepsilon_i}} f(x)$$

ברור שאם יש לפחות שתי קואורדינטות i, j שעבורן $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 1$ אז $\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ \forall 1 \leq i \leq k \ x_i = \varepsilon_i}} f(x) = 2^{n-k}$ שהרי יש בדיוק 2^{n-k} וקטורים שמקיימים $x_i = \varepsilon_i$ לכל $1 \leq k \leq n$ ולכל אחד מהם $f(x) = 1$.

אם יש בדיוק קואורדינטה אחת i שעבורה $\varepsilon_i = 1$ אז אנחנו בעצם צריכים לספור את מספר הווקטורים שעבורם יש לפחות 1 אחד מהקואורדינטה ה- $k+1$. כמו בשיקולי הספירה שעשינו למעלה, מהסתכלות

במבנה המסודר שלנו של $\{0,1\}^n$, נובע שמספר הווקטורים האלה הוא $2^{n-k} - 1$ (שוב, בכל הווקטורים בבליק של 2^{n-k} הווקטורים האלה יש לפחות שתי אחדות פרט לווקטור הראשון שבו מופיע 1 רק בקואורדינטה ה- i), ואז מתקיים $\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ \forall 1 \leq i \leq k, x_i = \varepsilon_i}} f(x) = 2^{n-k} - 1$.

אם כל הקואורדינטות הן 0 אז שוב באופן דומה נובע ש-

$$\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ \forall 1 \leq i \leq k, x_i = \varepsilon_i}} f(x) = (2^{n-k-1} - 1) + \dots + (2 - 1) = 2^{n-k} - 2 - (n - k - 1) = 2^{n-k} - n + k - 1$$

כעת נוכל לחשב את מבוקשנו. נשים לב ש- $x_1 + \dots + x_k = 0$ אמ"מ יש מספר זוגי של קואורדינטות שמקבלות 1. נסמן ב- k_e את המספר הזוגי הגדול ביותר כך ש- $k_e \leq k$ וב- k_o את המספר האיזוגי הגדול ביותר המקיים $k_o \leq k$. אזי,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 + \dots + x_k = 0}} f(x) &= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ \text{all coordinates} \\ \text{are 0}}} f(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ \text{2 coordinates} \\ \text{are 1}}} f(x) + \dots + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ \text{k}_e \text{ coordinates} \\ \text{are 1}}} f(x) = \\ &= (2^{n-k} - n + k - 1) + \binom{k}{2} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 = x_2 = 1 \\ x_3 = \dots = x_k = 0}} f(x) + \dots + \binom{k}{k_e} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 = \dots = x_{k_e} = 1 \\ x_{k_e+1} = \dots = x_k = 0}} f(x) = \\ &= (2^{n-k} - n + k - 1) + \left(\binom{k}{2} + \binom{k}{4} + \dots + \binom{k}{k_e} \right) \cdot 2^{n-k} \end{aligned}$$

כעת, $x_1 + \dots + x_k = 1$ אמ"מ יש מספר איזוגי של קואורדינטות שמקבלות 1 ולכן באופן דומה:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 + \dots + x_k = 1}} f(x) &= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ \text{one coordinate} \\ \text{is 1}}} f(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ \text{3 coordinates} \\ \text{are 1}}} f(x) + \dots + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ \text{k}_o \text{ coordinates} \\ \text{are 1}}} f(x) = \\ &= (2^{n-k} - 1) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 = x_2 = x_3 = 1 \\ x_4 = \dots = x_k = 0}} f(x) + \dots + \binom{k}{k_o} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 = \dots = x_{k_o} = 1 \\ x_{k_o+1} = \dots = x_k = 0}} f(x) = \\ &= (2^{n-k} - 1) + \left(\binom{k}{3} + \dots + \binom{k}{k_o} \right) \cdot 2^{n-k} \end{aligned}$$

נחסר ונקבל:

$$\begin{aligned} 2^n \hat{f}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) &= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 + \dots + x_k = 0}} f(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 + \dots + x_k = 1}} f(x) = \\ &= \left((2^{n-k} - n + k - 1) + \left(\binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k_e} \right) \cdot 2^{n-k} \right) \\ &\quad - \left((2^{n-k} - 1) + \left(\binom{k}{3} + \dots + \binom{k}{k_o} \right) \cdot 2^{n-k} \right) = \\ &= (-n + k) + 2^{n-k} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} - \sum_{i=0}^1 (-1)^i \binom{k}{i} = \end{aligned}$$

$$= (-n + k) - \left(\binom{k}{0} - \binom{k}{1} \right) = -n + k - 1 + k = -n + 2k - 1$$

כאשר המעבר הלפני האחרון נעשה בשימוש בזרות הקומבינטורית הידועה $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} = 0$.

לסיום, נשים לב שכל החישובים נעשו בהנחה שהקואורדינטות החיוביות הן הראשונות אבל למעשה אין חשיבות לסדר ובכל מקום שבו נכתב x_1, \dots, x_k אפשר היה לכתוב x_{i_1}, \dots, x_{i_k} וכל החישובים היו זהים. לכן, ניתן לסכם:

$$\hat{f}(0, \dots, 0) = \frac{2^n - n - 1}{2^n}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{-n + 2|x| - 1}{2^n}$$

סעיף ב

נחשב את מקדמי פורייה של פונקציית 3-רוב. נסמן ב- f_k את פונקציית k -רוב. ונסמן ב- g_k את הפונקצייה

$$g_k(x) = \begin{cases} 1, & |x| = k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

אז מתקיים $f_{k+1}(x) = f_k(x) - g_k(x)$. שהרי,

- אם $|x| < k$ אז $f_k(x) - g_k(x) = 0 - 0 = 0$
- אם $|x| = k$ אז $f_k(x) - g_k(x) = 1 - 1 = 0$
- אם $|x| \geq k + 1$ אז $f_k(x) - g_k(x) = 1 - 0 = 1$

מהלינאריות של טרנספורם פורייה, נובע ש- $\hat{f}_{k+1} = \hat{f}_k - \hat{g}_k$. ולכן, כדי למצוא את מקדמי פורייה של פונקציית 3-רוב, מספיק למצוא את מקדמי פורייה של $g = g_2$ שהיא פשוטה יותר.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| = 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

בדומה לקודם,

$$2^n \hat{g}(0, \dots, 0) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} g(x) = \#\{x \in \{0,1\}^n : |x| = 2\} = \binom{n}{2}$$

בעזרת הניסיון הרב שצברנו בסעיף א, נאזור אומץ וישר נחשב תוצאה מוכללת:

$$\begin{aligned} 2^n \hat{g}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) &= \sum_{x \in \{0,1\}^n} g(x) (-1)^{\sum_{i=1}^n a_i x_i} = \sum_{x \in \{0,1\}^n} g(x) (-1)^{\sum_{i=1}^k x_i} = \\ &= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 + \dots + x_k = 0}} g(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 + \dots + x_k = 1}} g(x) \end{aligned}$$

שוב, $x_1 + \dots + x_k = 0$ אמ"מ יש מספר זוגי של קואורדינטות שמקבלות 1 ו- $x_1 + \dots + x_k = 1$ אמ"מ יש מספר איזוגי של קואורדינטות שמקבלות 1. לכן, אם נסמן k_e, k_o כמו בסעיף הקודם נקבל:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 + \dots + x_k = 0}} g(x) &= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ \text{all coordinates} \\ \text{are 0}}} g(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ 2 \text{ coordinates} \\ \text{are 1}}} g(x) + \dots + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ k_e \text{ coordinates} \\ \text{are 1}}} g(x) = \\
&= \binom{k}{0} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 = \dots = x_k = 0}} g(x) + \binom{k}{2} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 = x_2 = 1 \\ x_3 = \dots = x_k = 0}} g(x) + \dots + \binom{k}{k_e} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 = \dots = x_{k_e} = 1 \\ x_{k_e+1} = \dots = x_k = 0}} g(x) = \\
&= \binom{k}{0} \binom{n-k}{2} + \binom{k}{2} \binom{n-k}{0} + \binom{k}{4} \cdot 0 + \dots + \binom{k}{k_e} \cdot 0 = \binom{n-k}{2} + \binom{k}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 + \dots + x_k = 1}} g(x) &= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ \text{one coordinate} \\ \text{is 1}}} g(x) + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ 3 \text{ coordinates} \\ \text{are 1}}} g(x) + \dots + \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ k_o \text{ coordinates} \\ \text{are 1}}} g(x) = \\
&= \binom{k}{1} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 = 1 \\ x_2 = \dots = x_k = 0}} g(x) + \binom{k}{3} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 = x_2 = x_3 = 1 \\ x_4 = \dots = x_k = 0}} g(x) + \dots + \binom{k}{k_o} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 = \dots = x_{k_o} = 1 \\ x_{k_o+1} = \dots = x_k = 0}} g(x) = \\
&= \binom{k}{1} \binom{n-k}{1} + \binom{k}{3} \cdot 0 + \binom{k}{5} \cdot 0 + \dots + \binom{k}{k_o} \cdot 0 = k(n-k)
\end{aligned}$$

נחסר ונקבל את הדרוש:

$$\begin{aligned}
2^n \hat{g}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) &= \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 + \dots + x_k = 0}} g(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_1 + \dots + x_k = 1}} g(x) = \\
&= \binom{n-k}{2} + \binom{k}{2} - k(n-k) = \frac{(n-2k)^2 - n}{2}
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\hat{g}(0, \dots, 0) &= \frac{\binom{n}{2}}{2^n} \\
\hat{g}(x) &= \frac{(n-2|x|)^2 - n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

ולבסוף התוצאה המיוחלת:

$$\hat{f}_3(x) = \hat{f}_2(x) - \hat{g}_2(x) = \begin{cases} \frac{2^n - n - 1 - \binom{n}{2}}{2^n}, & |x| = 0 \\ \frac{-n + 2|x| - 1}{2^n} - \frac{(n-2|x|)^2 - n}{2^{n+1}}, & 0 < |x| < 2 \end{cases}$$

אגב, בדקתי את התוצאות ב-MatLab והן אמורות להיות נכונות...

נספח

טענה: לכל $a, b \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{pmatrix} a & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & a \end{pmatrix} = (a-b)^{n-1}((n-1)b+a)$$

הוכחה: ידוע שחיבור של שורות לשורות אחרות או חיבור עמודות לעמודות אחרות לא משנים את הדטרמיננטה. נחבר לשורה הראשונה את כל השורות האחרות ונקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} a+(n-1)b & b+a+(n-2)b & \cdots & b+a+(n-2)b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

כעת נחסיר את העמודה הראשונה מכל שאר העמודות ונקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} a+(n-1)b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית עליונה ומאחר שהפעולות שביצענו משמרות דטרמיננטה נקבל את הדרוש:

$$\det \begin{pmatrix} a & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a+(n-1)b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

☺